NO. 1
DATE

量子力学 まとめ 第13回　　201110872　津村康平

角運動量の合成　$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} J_{1k}$

$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} J_{2k}$

∴ $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

∴ $[J_i, J_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} J_k$　　ただし $[J_{1i}, J_{2j}] = 0$

$\vec{J}$の固有状態

$\vec{J}^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle$

$J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$

$\vec{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1\rangle$

$J_{1z} |j_1 m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle$

$\vec{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_2 m_2\rangle$

$J_{2z} |j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle$

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \vec{J}_2$

$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$　←　$(2j_1+1)(2j_2+1)$ コある

$\{ |jm\rangle \} \Longleftrightarrow \{ |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle \}$

∵ $j_{min} \leq j \leq j_{max}$

$-j \leq m \leq j$　　1コずつ $2j+1$コ

$|jm\rangle = |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | jm\rangle$ — ①

$|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = |jm\rangle \langle jm | j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$ — ②

①へ②を代入　$|jm\rangle = |j'm'\rangle \underbrace{\langle j'm' | j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | jm\rangle}_{=\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}}$　Ⓐ

②へ①を代入　$|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1'\, j_2 m_2'\rangle \underbrace{\langle j_1 m_1'\, j_2 m_2' | jm\rangle \langle jm | j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle}_{=\,\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}}$　Ⓑ

ⒶⒷ　C-~~B~~G係数の直交関係式

$J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$

$= (J_{1z} + J_{2z}) |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | jm\rangle$

$J_{1z} \otimes 1 |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle + 1 \otimes J_{2z} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

$= \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle + |j_1 m_1\rangle \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle$

$= \hbar (m_1 + m_2) |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

$= \hbar (m_1 + m_2) |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$

$m = m_1$ のとき

$|jm\rangle$? $|jj\rangle$ $J_+ |jj\rangle = 0$

$$\underset{m_1 = j_1}{|j_1 j_1\rangle} \otimes \underset{m_2 = j_2}{|j_2 j_2\rangle} = |j_1 j_1\ j_2 j_2\rangle = |jj\rangle$$

$$J_+ |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle$$
$$= (J_{1+} \otimes 1 + 1 \otimes J_{2+}) |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle$$
$$= J_{1+} |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle + |j_1 j_1\rangle \otimes J_{2+} |j_2 j_2\rangle$$

$$|j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle = |j_1 j_1\ j_2 j_2\rangle$$
$$m = j_1 + j_2$$
$$j \geq j_1 + j_2$$
$$J^+ |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle = 0$$

$$|j\,j-1\rangle = |j_1 + j_1,\ j_1 + j_1 - 1\rangle$$
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2j_1 + 2j_2}} (J_{1-} + J_{2-}) |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$$
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2j_1 + 2j_2}} (J_{1-} |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle + |j_1 j_1\rangle \otimes J_{2-} |j_2 j_2\rangle)$$
$$= \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1 j_1 - 1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2 - 1\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1 j_1 - 1, j_2 j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1 j_1, j_2 j_2 - 1\rangle$$

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = (|j_1 j_1 - 1, j_2 j_2\rangle, |j_1 j_1, j_2 j_2 - 1\rangle) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \end{pmatrix}$$

$$|*\rangle = (|j_1 j_1 - 1, j_2 j_2\rangle, |j_1 j_1, j_2 j_2 - 1\rangle) \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \end{pmatrix}$$

$$\langle * | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \left(-\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}, \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}\right) \times \psi^+ \psi \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 | * \rangle = 0$$
$$\shortparallel$$
$$C \langle j_1 + j_2 | J_-^+ | * \rangle = \langle j_1 + j_2 | J_+ | * \rangle = 0$$

$\Rightarrow |*\rangle$ は $|j'j'\rangle$ の形のはず

$|*\rangle = |j_1+j_2-1,\ j_1+j_2-1\rangle$

$\quad (|j_1+j_2,\ j_1+j_2-1\rangle,\ |j_1+j_2-1,\ j_1+j_2-1\rangle)$

$\quad = (|j_1 j_1-1,\ j_2 j_2\rangle,\ |j_1 j_1,\ j_2 j_2-1\rangle) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} & -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} & +\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \langle j_1 j_1-1,\ j_2 j_2| \\ \langle j_1 j_1,\ j_2 j_2-1| \end{pmatrix} \longrightarrow * \begin{pmatrix} \langle j_1 j_1-1, j_2 j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle & \langle j_1 j_1-1, j_2 j_2 | j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle \\ \langle j_1 j_1, j_2 j_2-1 | j_1 j_1-1, j_2 j_2\rangle & \langle j_1 j_1, j_2 j_2-1 | j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle \end{pmatrix}$

$\quad = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} & -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} & -\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \end{pmatrix}$

$|j_1+j_2,\ j_1+j_2\rangle$ → J_-を作用させて

$$\left.\begin{array}{l} |j_1+j_2,\ j_1+j_2-1\rangle \\ |j_1+j_2,\ j_1+j_2-2\rangle \\ \quad\vdots \\ |j_1+j_2,\ -(j_1+j_2)\rangle \end{array}\right\} 2(j_1+j_2)+1 \text{コ}$$

$|j_1+j_2-1,\ j_1+j_2-1\rangle$ → J_-を作用 $\quad |j_1+j_2-1,\ m\rangle \quad m = j_1+j_2-1,\ \cdots,\ -(j_1+j_2-1)$

$j_1 \geq j_2$と仮定しても一般性を失わない

$j = j_1+j_2-1 \qquad m = j_1+j_2-1 \qquad (m_1, m_2):(j_1-1, j_2),\ (j_1, j_2-1)$

$j = j_1+j_2-2 \qquad m = j_1+j_2-2 \qquad (m_1, m_2):(j_1-2, j_2),\ (j_1-1, j_2-1),\ (j_1, j_2-2)$

$\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$j = j_1+j_2-S \qquad j = j_1+j_2-S \qquad (m_1, m_2):(j_1-s, j_2)\cdots(j_1, j_2-S)$

$j = j_1+j_2-S = j_1+j_2-2j_2 = j_{min}$

一般に角運動量jの状態は$2j+1$コある

$$\sum_{j=j_{min}}^{max}(2j+1) = 2\sum_{min}^{max} j + (j_{max}-j_{min}+1)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(j_{max}+j_{min})(j_{max}-j_{min}+1) + (j_{max}-j_{min}+1)$$

$$= (j_{max}+j_{min}+1)(j_{max}-j_{min}+1)$$

$$= (j_1+j_2+j_1-j_2+1)(j_1+j_2-(j_1-j_2)+1)$$

$$= (2j_1+1)(2j_2+1)$$