201110861 柴田侑宏

# 量子力学

## 角運動量の合成

$\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2 \quad [J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k} \quad , [J_{1i}, J_{2j}] = 0$

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$$

$\boldsymbol{J}$の固有状態

$$\boldsymbol{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle \qquad \boldsymbol{J}_2^2 |j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1)|j_2, m_2\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle \qquad J_{2z} |j_2, m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2, m_2\rangle$$

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \boldsymbol{J}_2$

$|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \leftarrow (2j_1+1)(2j_2+1)$ コだけある

$\Updownarrow$ $\quad \boxed{j_1, j_2 : 固定}$

$|j, m\rangle \qquad -j_2 \leq m_2 \leq j_2 \leftarrow 2j_2+1$ コ

$\{|j, m\rangle\} \Leftrightarrow \{|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle\}$

$j_{min} \leq j \leq j_{max}$

$-j \leq m \leq j$

$$|j, m\rangle = |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j, m\rangle \quad ①$$

$$|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = |j, m\rangle\langle j, m | j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \quad ②$$

クレブシュ・ゴルダン係数

①へ②を代入

$$|j, m\rangle = |j', m'\rangle \boxed{\langle j', m' | j_1 m_1, j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j, m\rangle}$$

$$\rotatebox{90}{=} \; \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

$$\langle j', m' | j_1 m_1, j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j, m\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \quad Ⓐ$$

②へ①を代入

$$|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1', j_2 m_2'\rangle \boxed{\langle j_1 m_1', j_2 m_2' | j, m\rangle\langle j, m | j_1 m_1, j_2 m_2\rangle}$$

$$\rotatebox{90}{=} \; \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$$

$$\langle j_1 m_1', j_2 m_2' | j, m\rangle\langle j, m | j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'} \quad Ⓑ$$

Ⓐ, Ⓑ はクレブシュ・ゴルダン係数の直交関係式

$J_z = J_{1z} + J_{2z}$

$$\begin{aligned}
J_z |j, m\rangle &= \hbar m |j, m\rangle \\
&= \underbrace{(J_{1z} + J_{2z})|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle}\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j, m\rangle \\
&\quad \underbrace{}_{} = \hbar m_1 |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle + \hbar m_2 |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \\
&\quad = \hbar(m_1 + m_2)|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \\
&= \hbar(m_1 + m_2)|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j, m\rangle = \hbar(m_1 + m_2)|j, m\rangle
\end{aligned}$$

$m = m_1 + m_2$

$|j,m\rangle$?  $|j,j\rangle : J_+|j,j\rangle = 0$  $m_1+m_2 = m = j$

$|j_1,j_1\rangle \otimes |j_2,j_2\rangle = |j_1, j_1, j_2 j_2\rangle = |j,j\rangle$  $(m_1=j_1, m_2=j_2)$  $j = j_1+j_2$

$$J_+|j_1,j_1\rangle\otimes|j_2,j_2\rangle = (J_{1+}\otimes 1 + 1\otimes J_{2+})|j_1,j_1\rangle\otimes|j_2,j_2\rangle$$

$$= \underbrace{J_{1+}|j_1,j_1\rangle}_{=0}\otimes 1|j_2,j_2\rangle + 1|j_1,j_1\rangle\otimes \underbrace{J_{2+}|j_2,j_2\rangle}_{=0}$$

$$=0$$

$$|j_1,j_1\rangle\otimes|j_2,j_2\rangle = |j_1,j_1,j_2 j_2\rangle$$

$m = j_1+j_2$  $j = j_1+j_2$, $j \ge j_1+j_2$

$|j_1,j_1\rangle\otimes|j_2,j_2\rangle \propto |j,j\rangle$

$$|j,j-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2j}} J_-|j,j\rangle_{j=j_1+j_2} \quad \left(|j,m-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} J_-|j,m\rangle\right)$$

$$|j,j-1\rangle = |j_1+j_2, \underbrace{j_1+j_2-1}_{m}\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2j_1+2j_2}}(J_{1-}+J_{2-})|j_1,j_1\rangle|j_2,j_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2j_1+2j_2}}\Big(\underbrace{J_{1-}|j_1,j_1\rangle}_{=\hbar\sqrt{2j_1}|j_1,j_1-1\rangle}\otimes|j_2,j_2\rangle + |j_1,j_1\rangle\otimes\underbrace{J_{2-}|j_2,j_2\rangle}_{=\hbar\sqrt{2j_2}|j_2,j_2-1\rangle}\Big)$$

$$= \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}|j_1,j_1-1\rangle|j_2,j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}|j_1,j_1\rangle|j_2,j_2-1\rangle$$

$\varphi$

$$= \Big(\underbrace{|j_1, j_1-1\rangle|j_2,j_2\rangle}_{j_1-1+j_2},\ \underbrace{|j_1,j_1\rangle|j_2,j_2-1\rangle}_{j_1+j_2-1}\Big) \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\end{pmatrix}$$

→ $m=j_1+j_2-1$は2つある

$$|\psi\rangle = (|j_1,j_1-1,j_2 j_2\rangle,\ |j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle)\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\\ \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\end{pmatrix}$$ を考える

$$\langle\psi|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \left(-\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}, \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\right) \underbrace{\varphi^\dagger\varphi}_{E_2} \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\end{pmatrix} = 0$$

$|\psi\rangle$と$|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle$は直交する $\langle j_1+j_2, j_1+j_2-1|\psi\rangle = 0$

$$c\langle j_1+j_2, j_1+j_2 | \underbrace{J_-^\dagger}_{=J_+}|\psi\rangle = \langle j_1+j_2, j_1+j_2|J_+|\psi\rangle = 0$$

$m=j_1+j_2$ : 1次元  $m=j_1+j_2-1$

$$J_+|\psi\rangle = 0$$

∴ $|\psi\rangle \propto |j',j'\rangle$の形のはず $(j'=j_1+j_2-1)$

$$|\psi\rangle = |j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$$

$$(|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle, |j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle) = (|j_1,j_1-1\rangle|j_2,j_2\rangle, |j_1,j_1\rangle|j_2,j_2-1\rangle)\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} & -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} & \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\end{pmatrix}$$

$$\left(|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle\right) = \left(|j_1 j_1, j_2 j_2\rangle\right)(1)$$

$$\langle j_1 j_1, j_2 j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = 1$$

$$\begin{pmatrix} \langle j_1, j_1-1| \langle j_2, j_2| \\ \langle j_1, j_1| \langle j_2, j_2-1| \end{pmatrix} \to ⊛$$

$$= \begin{pmatrix} \langle j_1 j_1-1, j_2 j_2 | j_1 j_1-1, j_2 j_2\rangle & \langle j_1 j_1-1, j_2 j_2 | j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle \\ \langle j_1 j_1, j_2 j_2-1 | j_1 j_1-1, j_2 j_2\rangle & \langle j_1 j_1, j_2 j_2-1 | j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} & -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} & \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\varphi^\dagger \varphi}_{=E_2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} & -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} & \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \end{pmatrix}$$

$|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle \to J_-$ を作用させて
$$\left.\begin{array}{l} |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle \\ |j_1+j_2, j_1+j_2-2\rangle \\ \vdots \\ |j_1+j_2, -(j_1+j_2)\rangle \end{array}\right\} 2(j_1+j_2)+1 \text{ コ.}$$

$j = j_{max} = j_1+j_2$

$|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle \to J_-$ を作用させて $|j_1+j_2-1, m\rangle$ $(m = j_1+j_2-2, \cdots, -(j_1+j_2-1))$

$j_1 \geq j_2$ と仮定しても一般性を失わない.

$j = j_1+j_2-1,\ m = j_1+j_2-1$ $\quad (m_1, m_2) = (j_1-1, j_2), (j_1, j_2-1)$

$j = j_1+j_2-1,\ m = j_1+j_2-1$ $\quad (m_1, m_2) = (j_1-2, j_2), (j_1-1, j_2-1), (j_1, j_2-2)$

$\vdots$

$j = j_1+j_2-S,\ m = j_1+j_2-S$ $\quad (m_1, m_2) = (j_1-S, j_2), \cdots (j_1, \underbrace{j_2-S}_{-j_2})$

$-j_2 \leq m_2 \leq j_2$

$$j_2 - S = -j_2 \Rightarrow 2j_2 = S$$

$$j = j_1+j_2-S = j_1+j_2-2j_2 = j_1-j_2 = j_{min}$$

合成角運動量 $j = j_{max} = j_1+j_2$

$j_{max}-1 \quad \cdots \quad j_{min} = j_1-j_2$

一般に角運動量 $j$ の状態は $2j+1$ コある

$$\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} (2j+1) = 2\sum_{min}^{j_{max}} j + (j_{max}-j_{min}+1)$$

$$= 2\frac{1}{2}(j_{max}+j_{min})(j_{max}-j_{min}+1) + (j_{max}-j_{min}+1)$$

$$= (j_{max}+j_{min}+1)(j_{max}-j_{min}+1)$$

$$= (j_1+j_2+j_1-j_2+1)(j_1+j_2-(j_1-j_2)+1)$$

$$= (2j_1+1)(2j_2+1)$$