

③ 角運動量の合成

$$\vec{J}_1, \vec{J}_2 \quad [J_{1i}, J_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k}$$

$$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{2k}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

ただし...

$$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$$

③ $\vec{J}$ の固有状態

$$\vec{J}^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle$$

$$J_z |j m\rangle = \hbar m |j m\rangle$$

$$\vec{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1\rangle$$

$$J_{1z} |j_1 m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle$$

$$\vec{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_2 m_2\rangle$$

$$J_{2z} |j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle$$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \vec{J}_2$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$\otimes$: tensor product

$$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \leftarrow (2j_1+1)(2j_2+1)$$

$$\updownarrow$$

$$|j m\rangle$$

j_1, j_2 : 固定

$$\underbrace{-j_1 \leq m_1 \leq j_1}_{2j_1+1}$$

$$\underbrace{-j_2 \leq m_2 \leq j_2}_{2j_2+1}$$

$$\{|j_m\rangle\} \Leftrightarrow \{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$$

$$\uparrow$$

$$j_{\min} \leq j \leq j_{\max}$$

$$-j \leq m \leq j$$

↑ ↓ 2j+1

$$|j_m\rangle = |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_m\rangle \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_m\rangle \langle j_m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_m\rangle \quad \nwarrow$$

$$\langle j_m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \quad \swarrow \quad \text{Clebsch - Gordon 係数}$$

①, ② を代入

$$|j_m\rangle = |j'_m\rangle \langle j'_m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_m\rangle$$

$\delta_{jj'} \delta_{mm'}$

$$\langle j'_m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_m\rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad \dots \textcircled{A}$$

① ② を代入

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m'_1 j_2 m'_2\rangle \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j_m\rangle \langle j_m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$\delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$

$$\langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j_m\rangle \langle j_m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad \dots \textcircled{B}$$

①, ② C-B係数の直交関係式

$$J_z = J_{1z} + J_{2z}$$

$$J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$$

$$= (J_{1z} + J_{2z}) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$J_{1z} \otimes 1 |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle + 1 \otimes J_{2z} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \dots (*)$$

$$(*) = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle + |j_1 m_1\rangle \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$\hbar m |jm\rangle = \hbar (m_1 + m_2) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$J_+ |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle$$

$$= (J_{1+} \otimes 1 + 1 \otimes J_{2+}) |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle$$

$$= \underbrace{J_{1+} |j_1 j_1\rangle}_0 \otimes |j_2 j_2\rangle + |j_1 j_1\rangle \otimes \underbrace{J_{2+} |j_2 j_2\rangle}_0$$

$$|j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle = |j_1 j_1 j_2 j_2\rangle$$

$$m = j_1 + j_2 \quad j = j_1 + j_2$$

$$j \geq j_1 + j_2$$

$$J^+ |j_1 j_2\rangle \otimes |j_2 j_1\rangle = 0$$

$$|j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle \propto |jj\rangle$$

"

$$|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle$$

$$|jj\rangle = |j_1 j_1 j_2 j_2\rangle$$

$$|jj-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2j}} J_- |jj\rangle_{j=j_1+j_2}$$

$$|jm-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} J_- |jm\rangle$$

$$\begin{aligned} |jj-1\rangle &= |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2j_1+2j_2}} (J_{1-} + J_{2-}) |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle \\ &= \frac{1}{\hbar\sqrt{2j_1+2j_2}} \left(\underbrace{J_{1-} |j_1 j_1\rangle}_{\hbar\sqrt{2j_1} |j_1 j_1-1\rangle} \otimes |j_2 j_2\rangle + |j_1 j_1\rangle \otimes \underbrace{J_{2-} |j_2 j_2\rangle}_{\hbar\sqrt{2j_2} |j_2 j_2-1\rangle} \right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} |j_1 j_1-1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2-1\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} |j_1 j_1-1, j_2 j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} |j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle$$

$$|j_1+j_2, \underbrace{j_1+j_2-1}_m\rangle = \underbrace{(|j_1 j_1-1, j_2 j_2\rangle, |j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle)}_{\substack{(j_1-1)+j_2 \quad j_1+(j_2-1)}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \end{pmatrix}$$

$$m = m_1 + m_2$$

$$m = j_1 + j_2 - 1 \text{ は } 2 \text{ 未満}$$

$$|*\rangle = (|j_1 j_1-1, j_2 j_2\rangle, |j_1 j_1, j_2 j_2-1\rangle) \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \end{pmatrix}$$

$$\langle * | j_1+j_2, j_1+j_2-1 \rangle = \left(-\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}, \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \right) \times \underbrace{\psi^\dagger \psi}_{E_2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle j_1+j_2, j_1+j_2-1 | * \rangle = 0$$

$$J_+ |*\rangle = 0 \quad m = j_1 + j_2 - 1$$

$$C \langle j_1+j_2 | \underbrace{J_-^*}_{J_+} | * \rangle = \langle j_1+j_2 | J_+ | * \rangle = 0$$

$$m = j_1 + j_2 - 1 \text{ 未満}$$

$$m = j_1 + j_2 - 1$$

$$|*\rangle \propto |j' j'\rangle \quad \text{の形のほう}$$

$$j' = j_1 + j_2 - 1$$

$$|*\rangle = |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$$

$$(|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle, |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle)$$

$|j_m\rangle$

$$= (|j_1 j_1 - 1, j_2 j_2\rangle, |j_1 j_1, j_2 j_2 - 1\rangle)$$

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} & -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} & +\sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \end{pmatrix}$$

$$m = m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 1$$

... ☆

$$(|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle) = (|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle) (1)$$

$$\langle j_1 j_1 j_2 j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 \rangle = 1$$

$$\begin{pmatrix} \langle j_1 j_1 - 1, j_2 j_2 | \\ \langle j_1 j_1, j_2 j_2 - 1 | \end{pmatrix} \rightarrow \text{☆}$$

$$\begin{pmatrix} \langle j_1 j_1 - 1, j_2 j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 \rangle & \langle j_1 j_1 - 1, j_2 j_2 | j_1 + j_2, j_2 - 1 \rangle \\ \langle j_1 j_1, j_2 j_2 - 1 | j_1 j_1 - 1, j_2 j_2 \rangle & \langle j_1 j_1, j_2 j_2 - 1 | j_1 j_1, j_2 j_2 - 1 \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} & -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \\ \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} & \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \end{pmatrix}$$

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle \rightarrow J_- \text{ を作用させ}$$

$$j = j_{\max} - j_1 + j_2$$

j

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$$

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 2\rangle$$

$$|j_1 + j_2, -(j_1 + j_2)\rangle$$

$$2(j_1 + j_2) + 1 \text{ 重}$$

$$|j_1 + j_2 - 1, \underline{j_1 + j_2 - 1}\rangle \rightarrow J_- \text{ の順に作用 } |j_1 + j_2 - 1, m\rangle$$

$$m = j_1 + j_2 - 1, \dots, -(j_1 + j_2 - 1)$$

$j_1 \geq j_2$ と仮定しても一般性を失わない

$$j = j_1 + j_2 - 1 \quad m = j_1 + j_2 - 1 \quad (m_1, m_2): (j_1 - 1, j_2)(j_1, j_2 - 1)$$

$$j = j_1 + j_2 - 2 \quad m = j_1 + j_2 - 2 \quad (m_1, m_2): (j_1 - 2, j_2)(j_1 - 1, j_2 - 1)(j_1, j_2 - 2)$$

⋮

$$j = j_1 + j_2 - S, \quad m = j_1 + j_2 - S \quad (m_1, m_2): (j_1 - S, j_2) \dots (j_1, \underbrace{j_2 - S}_{j_2})$$

$$j_2 - S = -j_2 \quad 2j_2 = S \quad -j_2 \leq m \leq j_2$$

$$j = j_1 + j_2 - S = j_1 + j_2 - 2j_2 = j_1 - j_2 = j_{\min}$$

$$\text{合成角運動量: } j = j_{\max} = j_1 + j_2$$

$$j_{\max-1}$$

$$\vdots$$

$$j_{\min} = j_1 - j_2$$

一般に角運動量 j の状態は... $2j+1$ がある

$$\sum_{j=j_{\min}}^{\max} (2j+1) = 2 \sum_{j=j_{\min}}^{\max} j + (j_{\max} - j_{\min} + 1)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} (\underbrace{j_{\max} + j_{\min}}_{j_1 + j_2}) (j_{\max} - j_{\min} + 1) + (j_{\max} - j_{\min} + 1)$$

$$= (j_{\max} + j_{\min} + 1) (j_{\max} - j_{\min} + 1)$$

$$= (j_1 + j_2 + j_1 - j_2 + 1) (j_1 + j_2 - (j_1 - j_2) + 1)$$

$$= (2j_1 + 1) (2j_2 + 1)$$