量子力学3　5/24

No.
Date

物理　201110859　佐藤和之

Time-reversal

$\Theta = i\sigma_2 K$　　K：複素共役　　Θ：時間反転

$= i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} K$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} K$

$\begin{cases} \Theta \vec{S} \Theta^{-1} = -\vec{S} & (\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}) \\ \Theta \vec{L} \Theta^{-1} = -\vec{L} \end{cases}$ ⇒ $\Theta(\vec{L}\cdot\vec{S})\Theta^{-1} = (-\vec{L})\cdot(-\vec{S}) = \vec{L}\cdot\vec{S}$

$\therefore H = f\vec{L}\cdot\vec{S}$　f：実　より

Hは時間反転で不変

$H\psi = E\psi$

→Θとすると　$\Theta H\psi = H\Theta\psi$　⟼　$\psi^\Theta = \Theta\psi$ とすると $H\psi^\Theta = E\psi^\Theta$ となる

$\Theta E\psi = E\Theta\psi$

∴ψとψ^Θは同じエネルギーをもつ

case 1　$\psi \propto \psi_\Theta$ → 特になし

case 2　$\psi \not\propto \psi_\Theta$ → ψとψ^Θは少なくとも2重に縮退

→ kramars 縮退

一般に

$UU^\dagger = 1$: Unitary

Θ : anti-Unitary → $\Theta = UK$

任意のψ、φに対して $\langle\Theta\phi|\Theta\psi\rangle$ を考える

$|\Theta\phi\rangle = UK\phi = U\phi^*$

$|\Theta\psi\rangle = U\psi^*$

$$
\begin{aligned}
\langle\Theta\phi|\Theta\psi\rangle &= (U\phi^*)^\dagger_k (U\psi^*)_k \\
&= (U^\dagger\phi)_k (U\psi^*)_k \\
&= (U^\dagger)_{ki}\phi_i \, U_{kj}\psi_j^* \\
&= (U_{ik})^* U_{kj} \, \phi_i\psi_j^* \\
&= (U^\dagger U)_{ij} \, \phi_i\psi_j^* \\
&= \delta_{ij} \, \phi_i\psi_j^* \\
&= \phi_i\psi_i^* \\
&= \langle\phi|\psi\rangle
\end{aligned}
$$

No.
Date

特に $\Theta = i\sigma_2 K$ ならば $\Theta^2 = i^2 \sigma_2^2 K^2 = -1$

さらに $\phi \equiv \psi^\theta$ として 前の式に代入すると

$\langle \Theta\psi^\theta | \Theta\psi \rangle = \langle \psi^\theta | \psi \rangle$

$= \langle \Theta\cdot\Theta\psi | \Theta\psi \rangle$

$= - \langle \psi | \psi^\theta \rangle$

$\Rightarrow \langle \psi | \psi^\theta \rangle = 0$: $|\psi\rangle$ と $|\psi^\theta\rangle$ は 直交している

もし $|\psi^\theta\rangle \propto |\psi\rangle$ ならば
$|\psi^\theta\rangle = c|\psi\rangle$ とあらわせる $\Rightarrow$ $\langle \psi | \psi^\theta \rangle = c = 0$
$\rightarrow |\psi^\theta\rangle = 0$

∴ $|\psi\rangle$ と $|\psi^\theta\rangle$ は 別な状態 にはならない ($|\psi\rangle = |\psi^\theta\rangle = 0$)

$|\psi\rangle = c_\uparrow |\uparrow\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} c_\uparrow \\ c_\downarrow \end{pmatrix}$ spinor (スピノル) $\left(\begin{array}{l} |\uparrow\rangle = |m = \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |\downarrow\rangle = |m = -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} S_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\hbar |\uparrow\rangle \\ S_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\hbar |\downarrow\rangle \end{cases}$

$\Theta = i\sigma_2 K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} K$ より

$\Theta |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|\downarrow\rangle$

$\Theta |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$

$|\psi^\theta\rangle = \Theta|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} K (c_\uparrow |\uparrow\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle)$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (c_\uparrow |\uparrow\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle)^*$

$= -c_\uparrow^* |\downarrow\rangle + c_\downarrow^* |\uparrow\rangle$

$\Theta^2 |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (-c_\uparrow |\downarrow\rangle + c_\downarrow |\uparrow\rangle)$

$= -c_\uparrow |\uparrow\rangle - c_\downarrow |\downarrow\rangle$

$= -|\psi\rangle$

No.
Date

2スピン　$\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$

$$|m_1, m_2\rangle = |m_1\rangle |m_2\rangle \quad (= |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle)$$

2スピン状態 : $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$

$$\Theta = i\sigma_2^{(1)} \cdot i\sigma_2^{(2)} K = (i\sigma_2^{(1)}) \otimes (i\sigma_2^{(2)}) K$$

第1スピンに作用　第2スピンに作用

$$\begin{aligned}
&\Theta |m_1, m_2\rangle \\
&= (i\sigma_2^{(1)}) \otimes (i\sigma_2^{(2)}) K |m_1\rangle |m_2\rangle \\
&= (i\sigma_2 |m_1\rangle)(i\sigma_2 |m_2\rangle)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Theta^2 |m_1, m_2\rangle \\
&= (i\sigma_2)^2 |m_1\rangle \cdot (i\sigma_2)^2 |m_2\rangle \\
&= (-1)^2 |m_1, m_2\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\Theta^2 = (-1)^2 = +1$ となっており クラマース縮退するとはいえない

一般の N 粒子系では

$$\Theta = (i\sigma_2^{(1)}) \otimes (i\sigma_2^{(2)}) \otimes \cdots \otimes (i\sigma_2^{(N)}) K$$

$$\Theta^2 = (i\sigma_2^{(1)})^2 \otimes (i\sigma_2^{(2)})^2 \otimes \cdots \otimes (i\sigma_2^{(N)})^2 K^2$$

$$= (-1)^N = \begin{cases} 1 & N : \text{even} \\ -1 & N : \text{odd} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ N: 奇数のときは クラマース縮退

2スピン系の角運動量

$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$: 合成スピン　$\begin{cases} \vec{S}_1 = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}^{(1)} \\ \vec{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}^{(2)} \end{cases}$

$S_i = S_{1i} + S_{2i}$

$\begin{cases} [S_{ai}, S_{aj}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_{ak} \\ [S_{ai}, S_{bi}] = 0 \quad (a \neq b) \end{cases}$

2つのスピンは独立だから

$$\begin{aligned}
[S_i, S_j] &= [S_{1i} + S_{2i}, S_{1j} + S_{2j}] \\
&= [S_{1i}, S_{1j}] + [S_{1i}, S_{2j}] + [S_{2i}, S_{1j}] + [S_{2i}, S_{2j}] \\
&= i\varepsilon_{ijk} S_{1k} + 0 + 0 + i\varepsilon_{ijk} S_{2k} \\
&= i\varepsilon_{ijk}(S_{1k} + S_{2k}) \\
&= i\varepsilon_{ijk} S_k
\end{aligned}$$

∴ 合成スピンは角運動量の交換関係も満たしている

No.
Date

$\vec{S}$ に対する状態？

$$\begin{cases} \vec{S}^2 |s,m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s,m\rangle \\ S_z |s,m\rangle = \hbar m |s,m\rangle \end{cases} \qquad m = \underbrace{-s, -s+1, \cdots, s-1, s}_{2s+1 \text{ コ}}$$

状態 $S_{1z} |\uparrow_1\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow_1\rangle$, $S_{2z} |\uparrow_2\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow_2\rangle$

$S_{1z} |\downarrow_1\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow_1\rangle$, $S_{2z} |\downarrow_2\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow_2\rangle$

$|m_1, m_2\rangle = |m_1\rangle |m_2\rangle \leftarrow |\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ の線型結合

$|s,m\rangle \leftrightarrow |m_1, m_2\rangle = |m_1\rangle |m_2\rangle$

相互関係
角運動量の合成

補足
$\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$
$= \vec{S_1} \otimes 1_2 + 1_1 \otimes \vec{S_2}$
$|m_1 m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$

$$\begin{aligned} S_z |m_1, m_2\rangle &= (S_{1z} + S_{2z}) |m_1, m_2\rangle \\ &= |S_{1z} m_1\rangle |m_2\rangle + |m_1\rangle |S_{2z} m_2\rangle \\ &= \hbar m_1 |m_1\rangle |m_2\rangle + |m_1\rangle (\hbar m_2 |m_2\rangle) \\ &= \hbar (m_1 + m_2) |m_1 m_2\rangle \end{aligned}$$

$\therefore S_z |m_1 m_2\rangle = \hbar m |m_1 m_2\rangle$

$m = m_1 + m_2$

$S_+ |s s\rangle = 0$ となる $|s s\rangle$ を考える

$S_+ = S_{1+} + S_{2+}$

$$S_{1+} |\uparrow_1\rangle = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x + i\sigma_y) |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

同様にして $S_{2+} |\uparrow_2\rangle = 0$

$$\begin{aligned} \therefore S_+ |\uparrow\uparrow\rangle &= (S_{1+} + S_{2+}) |\uparrow\uparrow\rangle \\ &= |S_{1+} \uparrow_1, \uparrow_2\rangle + |\uparrow_1, S_{2+} \uparrow_2\rangle = 0 \end{aligned}$$

$S_z |\uparrow\uparrow\rangle = \hbar \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle = \hbar |\uparrow\uparrow\rangle$

$|\uparrow\uparrow\rangle = |s, m\rangle$
$m = 1$,
$s = 1$

$|s=1, m=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$

No.
Date

$$|j, m-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} S_- |j, m\rangle \text{ より}$$

$j = s = 1,\ m = 1$ のとき

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2\cdot 1}} S_- |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (S_{1-} + S_{2-}) |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (|S_{1-}\uparrow_1, \uparrow_2\rangle + |\uparrow_1, S_{2-}\uparrow_2\rangle)$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (\hbar|\downarrow\uparrow\rangle + \hbar|\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$S_{1-}|\downarrow_1\rangle = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x - i\sigma_y) |\downarrow_1\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$S_{1-}|\uparrow_1\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar|\downarrow_1\rangle$$

$j = 1,\ m = 0$ のとき

$$|1, -1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{1\cdot 2}} S_- |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} (S_{1-} + S_{2-}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (|S_{1-}\downarrow, \uparrow\rangle + |S_{1-}\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, S_{2-}\uparrow\rangle + |\uparrow, S_{2-}\downarrow\rangle)$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (0 + \hbar|\downarrow\downarrow\rangle + \hbar|\downarrow\downarrow\rangle + 0)$$

$$= |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$S_-|\downarrow\downarrow\rangle = 0$$

$$\therefore \begin{cases} |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$$