量子力学3　演習問題1

No.
Date

物理　201110859　佐藤和之

問題1

(1)

$$H|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = -1 \times |1\rangle$$

$$H|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -1 \times |2\rangle$$

$$H|3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 2 \times |3\rangle$$

∴ $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ は H の固有ケット である //

$\langle 1|1\rangle = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$　　$\langle 1|2\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0$

$\langle 2|2\rangle = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$　　$\langle 2|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$

$\langle 3|3\rangle = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$　　$\langle 3|1\rangle = \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = 0$

⇒ $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ は規格直交化されている //

∴ $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = 2$ //

(2)

$$\psi = (|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\psi^\dagger H \psi = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

∴ H は対角化された //

No.
Date

(3) $P_1P_2 = (|1\rangle\langle 1|)(|2\rangle\langle 2|)$

$= |1\rangle(\langle 1|2\rangle)\langle 2|$

$= 0$

$P_2P_3 = (|2\rangle\langle 2|)(|3\rangle\langle 3|)$

$= |2\rangle(\langle 2|3\rangle)\langle 3|$

$= 0$

$P_3P_1 = (|3\rangle\langle 3|)(|1\rangle\langle 1|)$

$= |3\rangle(\langle 3|1\rangle)\langle 1|$

$= 0$

$P_i^2 = (|i\rangle\langle i|)(|i\rangle\langle i|)$

$= |i\rangle(\langle i|i\rangle)\langle i|$

$= |i\rangle\langle i| = P_i$

$$\therefore \begin{cases} P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1 = 0 \\ P_i^2 = P_i \end{cases}$$

//

(4) $P_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$P_2 = |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$P_3 = |3\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\therefore P_1 + P_2 + P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$

//

エルミート行列の固有ケットは規格直交化された完全系をつくるから

$\sum_{i=1}^{3} |i\rangle\langle i| = E_3$ となるはず

$\Rightarrow |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| = E_3$

$P_1 + P_2 + P_3 = E_3$ となる

//

No.

Date

(5)

$$\sum_i \varepsilon_i P_i = -\begin{pmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H$$

//

(6)

$$[H, R] = HR - RH = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

//

(7)

$$R' = \Psi^\dagger R \Psi = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

//

(8)

$$|R' - \lambda E| = 0 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(1-\lambda) - \frac{3}{4}(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda^2)$$

$\lambda = \pm 1$ （$\lambda = 1$ で縮退）

No.
Date

$\lambda = 1$ のとき

$$(R' - E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x \quad , \quad z$ は任意の値

$\lambda = -1$ のとき

$$(R' + E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x = -\sqrt{3}y \quad , \quad z = 0$

これらの固有ベクトルは 規格直交化されるように選ぶから

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ とする

$$U = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi' = \psi U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$|1'\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad |2'\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |3'\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

No.
Date

$$H|1'\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = -1 \times |1'\rangle$$

$$R|1'\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 1 \times |1'\rangle$$

∴ $|1'\rangle$ は H, R の同時固有ケット //

$$H|2'\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times |2'\rangle$$

$$R|2'\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times |2'\rangle$$

∴ $|2'\rangle$ は H, R の同時固有ケット

$$H|3'\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 2 \times |3'\rangle$$

$$R|3'\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 1 \times |3'\rangle$$

∴ $|3'\rangle$ は H, R の同時固有ケット

∴ $|i'\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$ は H, R の同時固有ケットとなる //

No.
Date

問題 2

(1) $\langle \partial_x \psi | \varphi \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, (\partial_x \psi)^* \varphi$

$= [\psi^* \varphi]_{-L/2}^{L/2} - \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \psi^* \partial_x \varphi$

ψ, φ は $\psi(x) = \psi(x+L)$ を満たしているから $= - \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \psi^* \partial_x \varphi = -\langle \psi | \partial_x \varphi \rangle$ //

エルミート演算子の定義

$\langle A^\dagger \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | A \varphi \rangle$

$\Rightarrow \langle \partial_x^\dagger \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | \partial_x \varphi \rangle$

$= -\langle \partial_x \psi | \varphi \rangle \quad \therefore \partial_x^\dagger = -\partial_x$ //

$= \langle -\partial_x \psi | \varphi \rangle$

$\therefore p_x^\dagger = (-i\hbar \partial_x)^\dagger = i\hbar\, \partial_x^\dagger = -i\hbar \partial_x = p_x$ //

(2) $p_x \left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}\right) = -i\hbar\, \partial_x \left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}\right) = \hbar k \left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}\right)$

$\therefore p_x \psi_k(x) = \hbar k\, \psi_k(x)$ を満たす ψ_k は $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$ と書ける //

$\psi_k(x) = \psi_k(x+L)$ を満たしている

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik(x+L)}$

$e^{ikL} = 1$

$\therefore kL = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \qquad \therefore k = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ となる //

No.
Date

(3)

$$\sum_n \psi_n(x)\,\psi_n^*(y) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \cdot \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-iky}$$

$$= \sum_n \frac{1}{L} e^{ik(x-y)}$$

$$= \sum_n \frac{1}{L} e^{in\frac{2\pi}{L}(x-y)}$$

$[0, 2\pi]$ で周期的関数 n 対して

$$\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{inz} = \delta(z) \quad \text{となる}$$

$z = \frac{2\pi}{L}(x-y)$ とする

$\Rightarrow$ $[0, L]$ で周期的関数

$$\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{in\frac{2\pi}{L}(x-y)} = \delta\left(\frac{2\pi}{L}(x-y)\right)$$

$$= \frac{2\pi}{L}\,\delta\left(\frac{2\pi}{L}(x-y)\right)$$

$$= \frac{2\pi}{L}\left|\frac{L}{2\pi}\right|\,\delta(x-y) = \delta(x-y)$$

(4)

$$H\psi_k(x) = \frac{p_x^2}{2m}\psi_k(x) = \frac{p_x}{2m}(p_x\psi_k(x)) = \frac{\hbar k}{2m}p_x\psi_k(x)$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi_k(x)$$

固有値 $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

縮退度 $n = 0$: 1

$n = \text{other}$: 2

No.
Date

(5) $\psi'(x) = U\psi(x) = \psi(-x) \longrightarrow \psi(x) = U^{-1}\psi'(x)$

$\psi(x) = U^{-1}\psi(-x)$

$\therefore U^{-1}\psi(x) = \psi(-x)$ となる

$$\begin{cases} H'\psi'(x) = i\hbar\partial_t\psi'(x) \\ H\psi(x) = i\hbar\partial_t\psi(x) \end{cases}$$

$H'U\psi(x) = i\hbar\partial_t(U\psi(x))$

$(U^{-1}H'U)\psi(x) = i\hbar\partial_t\psi(x)$

$\therefore H = U^{-1}H'U$

$H' = UHU^{-1}$ //

$UHU^{-1}\psi'(x) = i\hbar\partial_t\psi'(x)$

$H\,U^{-1}\psi'(x) = i\hbar\partial_t(U^{-1}\psi'(x))$

$H\psi'(-x) = i\hbar\partial_t\psi(-x)$

$-x \to x$ とすると $H\psi'(x) = i\hbar\partial_t\psi(x)$

$\therefore H' = H$

(6) H と H' の関係 → H と H' は等しい //

(4) より H は $\psi_k(x)$ の固有関数となっている

$U\psi_k(x) = \psi_k(-x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-ikx}$ ← 固有関数となっていない

$\therefore \psi_k(x)$ は H、U の同時固有関数となっていない //

(7) $\psi_{\varepsilon,r}(x) = Ae^{i\frac{2\pi}{L}\cdot nx} + Be^{-i\frac{2\pi}{L}\cdot nx}$ ($n \geq 0$ とする)

$H\psi_{\varepsilon,r}(x) = A\,He^{i\frac{2\pi}{L}nx} + B\,He^{-i\frac{2\pi}{L}nx}$

(4) より $= A\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2\, e^{i\frac{2\pi}{L}nx} + B\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2\, e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}$

$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\cdot n^2\,\psi_{\varepsilon,r}(x)$

$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2$ とする

No.
Date

$$U\psi_{\varepsilon,r}(x) = \psi_{\varepsilon,r}(-x) = Ae^{-i\frac{2\pi}{L}nx} + Be^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

$$= r\psi_{\varepsilon,r}(x) = r\left(Ae^{i\frac{2\pi}{L}nx} + Be^{-i\frac{2\pi}{L}nx}\right)$$

となるには $\begin{cases} A = rB \\ B = rA \end{cases} \Rightarrow r^2 = 1$, $r = \pm 1$ となっなければならない //

(8) (7)で証明した //

問題3

(1) A : n次元エルミート行列とする $(A = A^\dagger)$

固有ベクトル $|a\rangle$, 固有値 a とする

$\therefore A|a\rangle = a|a\rangle$ ——— , 左から $\langle a|$ を作用させると

$\langle a|A|a\rangle = a\langle a|a\rangle$

両辺で $\dagger$ をとる $\langle a|A^\dagger = \langle a|a^*$

$\langle a|A = \langle a|a^*$

だから $|a\rangle$ を作用させる $\langle a|A|a\rangle = \langle a|a\rangle a^*$

$\therefore (a - a^*)\langle a|a\rangle = 0$

$\therefore a = a^*$

エネルギー固有値 a は実 //

(2) $\begin{cases} H|i\rangle = E_i|i\rangle \text{ —①} \\ H|j\rangle = E_j|j\rangle \text{ —②} \end{cases}$ とする $(E_i \neq E_j)$

$(①)^\dagger$ $\langle i|H = \langle i|E_i$

右辺から $|j\rangle$ を作用させる

$\langle i|H|j\rangle = \langle i|j\rangle E_i$

② 左から $\langle i|$ を作用させる

$\langle i|H|j\rangle = E_j\langle i|j\rangle$

$\therefore (E_i - E_j)\langle i|j\rangle = 0$

$\Rightarrow$ $E_i \neq E_j$ より $\langle i|j\rangle = 0$

$\therefore$ 異なるエネルギーに属する固有ベクトルは直交する //

No.
Date

(3) 規格直交化された固有ベクトル

$$\begin{cases} \langle i | j \rangle = \delta_{ij} \\ A|i\rangle = E_i |i\rangle \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N)$$

$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$

左から $\langle j|$ を作用させる　$\langle i | j \rangle \langle j| = \delta_{ij} \langle j|$

$\sum_{j=1}^{n}$ をとると　$\langle i| \sum_{j=1}^{n} |j\rangle\langle j| = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \langle j| = \langle i|$

$\therefore (\langle 1|, \langle 2|, \cdots, \langle n|) \sum_{j=1}^{n} |j\rangle\langle j| = (\langle 1|, \langle 2|, \cdots, \langle j|) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{E_n}$

(固有ベクトルは次元の数だけあるから)

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} |j\rangle\langle j| = E_n$$

//

(4) 完全な固有ベクトル

$$\begin{cases} \sum_j |j\rangle\langle j| = E & \text{—①} \\ A|j\rangle = E_j |j\rangle & \text{—②} \end{cases}$$

①において、左から $\langle i|$ を作用させる

$$\sum_j \langle i | j \rangle \langle j| = \langle i|$$

$j = i$ のときのみ 1 をもち、$i \neq j$ のときは 0

$$\therefore \langle i | j \rangle = \delta_{ij}$$

∴ 完全な固有ベクトルは、規格直交化されている

//