量子力学3 演習問題10

No.
Date

201110867 武井 阜

問1

(1)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\xi \frac{f(\xi)}{\xi - z} \longrightarrow f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\xi - \frac{-f(\xi)}{(\xi-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\xi - \frac{-2(\xi-z)}{(\xi-z)^4}f(\xi) = \frac{2}{2\pi i}\int_C d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} \quad \text{——} \ ☆$$

$n=1$ のときは自明. n のとき ☆ が成り立つとすると

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{n!}{2\pi i}\int_C d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i}\int_C d\xi \frac{(n+1)(\xi-z)^n f(\xi)}{(\xi-z)^{2(n+1)}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+2}}$$

よって, $n+1$ のときも成り立つ.

$$\therefore f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C d\xi \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}$$

□

(2)

$f(t) = (t^2-1)^l$ とおくと

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l f(t)}{dt^l} = \frac{1}{2^l \cancel{l!}}\cdot\frac{\cancel{l!}}{2\pi i}\int_{C_t} d\xi \frac{(\xi^2-1)^l}{(\xi-t)^{l+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_t} d\xi \left[\frac{\xi^2-1}{2(\xi-t)}\right]^l \frac{1}{\xi-t}$$

□

(3)

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{\xi^2-1}{2(\xi-t)} \Leftrightarrow \zeta = \frac{2(\xi-t)}{\xi^2-1} \Leftrightarrow \zeta\xi^2 - 2\xi + 2t - \zeta = 0$$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{1-\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}}{\zeta} = \frac{1-R}{\zeta}$$

$$\therefore \begin{cases} \xi = \dfrac{1-R}{\zeta} \\ R = \sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2} \end{cases}$$

No.
Date

(4) $R = \sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2} = 1 - t\zeta + O(\zeta^2)$
すると
$\xi = \dfrac{1-R}{\zeta} = t + O(\zeta)$ $\left(\begin{array}{c} C_t^+ \\ \zeta\text{平面} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C_0^+ \\ \xi\text{平面} \end{array}\right)$ と写像される事を示す為にはζの二次までとる必要がある.
$\zeta \to 0$ とすると $\xi \to t$

(5) $\xi = \dfrac{1-R}{\zeta}$
より
$$d\xi = \left\{\frac{d}{d\zeta}(1-R)\cdot\frac{1}{\zeta} + (1-R)\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}d\zeta = \left(-\frac{\zeta-t}{\zeta R} - \frac{1-R}{\zeta^2}\right)d\zeta$$
$$= -\frac{\zeta(\zeta-t)+(1-R)R}{\zeta^2 R}d\zeta = \frac{(1-R)/\zeta - t}{\zeta R}d\zeta = \underline{\frac{\xi - t}{\zeta R}d\zeta}$$
□

(6) $P_\ell(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_t} d\xi \left[\frac{\xi^2-1}{2(\xi-t)}\right]^\ell \frac{1}{\xi - t}$
前問の結果を使うと
$$P_\ell(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_t} d\zeta\, \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\ell+1}$$
ここで $\zeta = 0$ は $(\ell+1)$ 位の極であることから, 留数定理より
$$P_\ell(t) = \frac{1}{\cancel{2\pi i}}\cdot\cancel{2\pi i}\,\frac{1}{\ell!}\lim_{\zeta\to 0}\frac{d^\ell}{d\zeta^\ell}\left\{\zeta^{\ell+1}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\ell+1}\right\}$$
$$= \underline{\frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\zeta^\ell}\frac{1}{R}\bigg|_{\zeta=0}}$$
□

No.
Date

(7) テイラー展開は $f(x)$ に対し

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}x^l \quad (x=0\text{ 周り})$$

であるから

$$\frac{1}{R}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\zeta^l}\frac{1}{R}\bigg|_{\zeta=0}\zeta^l=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(t)\zeta^l \quad (\because (8))$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(t)\zeta^l$$

□

(8)
$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2+\mathbf{r}'^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}}=\frac{1}{\sqrt{r_>^2+r_<^2-2r_>r_<\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2-2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}}$$

前問の式で $t=\cos\theta$, $\zeta=(r_</r_>)$ としたものを利用すると

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}')$$

また

$$P_l(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}')=\frac{4\pi}{2l+1}\times\sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')$$

から

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=4\pi\sum_{lm}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')$$

□

(9)
$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r'<r_c}d^3r'\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\sum_{lm}\frac{r'^l}{r^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{lm}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

ここで

$$q_{lm}=\int d^3r'(r')^l\rho(\mathbf{r}')Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')$$

である。

□

No.
Date

問2

(1) $R|j_1m_1, j_2m_2\rangle = (R|j_1m_1\rangle) \otimes (R|j_2m_2\rangle)$

(∵ 演算子Rは $R|j_1m_1, j_2m_2\rangle = R(|j_1m_1\rangle \otimes |j_2m_2\rangle) = R|j_1m_1\rangle \otimes R|j_2m_2\rangle$ のように働く。)

$$= |j_1m_1', j_2m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1'm_1}(R) D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$$

(∵ $R|jm\rangle = |jm'\rangle D^{j}_{m'm}(R)$ より

$R|j_1m_1\rangle = |j_1m_1'\rangle D^{j_1}_{m_1'm_1}(R)$, $R|j_2m_2\rangle = |j_2m_2'\rangle D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$

なので

$$R|j_1m_1\rangle \otimes R|j_2m_2\rangle = |j_1m_1'\rangle \otimes |j_2m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1'm_1}(R) D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$$
$$= |j_1m_1', j_2m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1'm_1}(R) D^{j_2}_{m_2'm_2}(R)$$)

$$= |jm'\rangle D^{j}_{m'm}(R) \langle jm|j_1m_1, j_2m_2\rangle$$

(∵ $|j_1m_1 j_2m_2\rangle = |jm\rangle\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$

より

$$R|j_1m_1 j_2m_2\rangle = R|jm\rangle\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$$
$$= |jm'\rangle D^{j}_{m'm}(R)\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$$)

(2) (1) より

$$|j_1m_1' j_2m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1'm_1} D^{j_2}_{m_2'm_2} = |jm'\rangle D^{j}_{m'm}\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$$

両辺に 左から $\langle j_1m_1' j_2m_2'|$ をかけると

$$D^{j_1}_{m_1'm_1} D^{j_2}_{m_2'm_2} = \langle j_1m_1' j_2m_2'|jm'\rangle D^{j}_{m'm}\langle jm|j_1m_1 j_2m_2\rangle$$

(∵ $\langle j_1m_1' j_2m_2'|j_1m_1' j_2m_2'\rangle = 1$)

□

No.
Date

(3) 前問の結果より

$$D^{\ell_1}_{m_1'0} D^{\ell_2}_{m_2'0} = \langle \ell_1 m_1' \ell_2 m_2' | \ell m' \rangle D^{\ell}_{m'm} \langle \ell m | \ell_1 0 \ell_2 0 \rangle$$

その和だけのこる

$$= \langle \ell_1 m_1' \ell_2 m_2' | \ell m' \rangle \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y^*_{\ell m'} \,| \ell_1 0 \ell_2 0 \rangle$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}} Y^*_{\ell_1 m_1'} Y^*_{\ell_2 m_2'}$$

$$Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2} = \sum_{\ell m} \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{(2\ell+1)4\pi}} \langle \ell 0 | \ell_1 0 \ell_2 0 \rangle \times Y_{\ell m} \langle \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | \ell m \rangle$$

$$\therefore \int_0^{\pi} d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\alpha\, Y^*_{\ell m}(\beta,\alpha) Y_{\ell_1 m_1}(\beta,\alpha) Y_{\ell_2 m_2}(\beta,\alpha)$$

$$= \left[\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell+1)}} \langle \ell 0 | \ell_1 0 \ell_2 0 \rangle\right] \langle \ell m | \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \rangle$$

□