量子力学演習問題10.

NO.

DATE

201110837 荒木 広夢

問題1.

(1) コーシーの積分定理

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

・$f^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\zeta\, f(\zeta) \underbrace{\frac{d}{dz}\frac{1}{\zeta - z}}_{(-1)\frac{-1}{(\zeta-z)^2}}$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

・$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$ とすると、

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C d\zeta\, f(\zeta) \underbrace{\frac{d}{dz}\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}}_{-(n+1)\frac{-1}{(\zeta-z)^{n+2}}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}$$

以上より、一般のnに対して、グルサの定理

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

が成り立つ。

(2) ロドリゲスの公式 $P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l$

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} f^l(t) \quad , f(t) = (t^2-1)^l$$

グルサの定理

$$= \frac{1}{2^l l!}\frac{l!}{2\pi i}\int_{C_t} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - t)^{l+1}} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\int_{C_t} d\zeta \frac{(\zeta^2-1)^l}{(\zeta - t)^{l+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_t} d\zeta \left[\frac{\zeta^2-1}{2(\zeta - t)}\right]^l \frac{1}{\zeta - t}$$

(3). $\frac{1}{s} = \frac{\zeta^2-1}{2(\zeta - t)}$

$$2(\zeta - t) = s(\zeta^2 - 1)$$

$$s\zeta^2 - 2\zeta + (2t - s) = 0$$

$$\zeta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - s(2t-s)}}{s} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2ts + s^2}}{s}$$

$R = \sqrt{1-2ts+s^2}$ とすると、

$$\zeta = \frac{1 \pm R}{s}$$

(4). $R=\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}$

$R' = \frac{1}{2}\frac{1}{R}(-2t+2\zeta) = \frac{\zeta-t}{R}$

したがって、Rを$\zeta=0$近傍で展開すると、

$$R = \frac{1}{0!} + \frac{-t}{1!}\zeta + O(\zeta^2)$$
$$= 1 - t\zeta + O(\zeta^2)$$

したがって、

$$\xi = \frac{1-(1-t\zeta+O(\zeta^2))}{\zeta} = \frac{t\zeta+O(\zeta^2)}{\zeta}$$
$$= t + O(\zeta)$$

したがって、

$\zeta \to 0$ で $\xi \to t$　　　　$\xi=t$周り $\to$ $\zeta=0$周り

また、$\zeta\to0$で$\xi\to t$なので、ζ平面上のC_0^+はξ平面上のC_t^+に写像されることが分かる。

$R'' = \left(\frac{\zeta-t}{R}\right)' = \frac{tR^2+(\zeta-t)^2}{R^3}$ より、$R''|_{\zeta=0} = t+t^2$

したがって、

$$R = 1 - t\zeta + \frac{1}{2}t(1-t)\zeta^2 + O(\zeta^3)$$
$$\to \xi = t - \frac{1}{2}t(1-t)\zeta + O(\zeta^2)$$

たとえば $\zeta = \varepsilon e^{i\theta}$ としたときに、

ξはtの周りを周る。

(5). $\xi = \frac{1-R}{\zeta}$

$$d\xi = \frac{-\frac{dR}{d\zeta}\cdot\zeta-(1-R)\cdot 1}{\zeta^2}\,d\zeta$$

$$\frac{dR}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta}\sqrt{1-2t\zeta+\zeta^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-2t+2\zeta}{R}$$

$$= \frac{\zeta-t}{R}$$

$$= \frac{-(\zeta-t)\zeta-(1-R)R}{\zeta^2 R}\,d\zeta$$

$$= \frac{-\zeta^2+t\zeta-R+R^2}{\zeta^2 R}\,d\zeta = \frac{-\cancel{\zeta^2}+t\zeta-R+(1-2t\zeta+\cancel{\zeta^2})}{\zeta^2 R}\,d\zeta$$

$$= \frac{-t\zeta+1-R}{\zeta^2 R}\,d\zeta$$

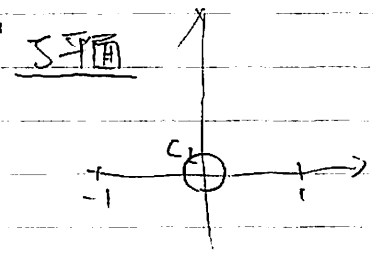
ここで, $\frac{-t\zeta+1-R}{\zeta} = -t+\frac{1-R}{\zeta} = -t+\xi$

$$= \frac{\xi-t}{\zeta R}\,d\xi$$

(6) $P_\ell(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\zeta \left[\frac{\zeta^2-1}{2(\zeta-t)}\right]^\ell \frac{1}{\zeta-t}$

$d\zeta = \frac{\zeta-t}{\varsigma R} d\varsigma$, $\frac{1}{\varsigma} = \frac{\zeta^2-1}{2(\zeta-t)}$ を代入して,

$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\varsigma}{\varsigma R}\left[\frac{1}{\varsigma}\right]^\ell = \frac{1}{2\pi i}\int_c d\varsigma \frac{1}{R\varsigma^{\ell+1}}$



ς平面では C_0^+ すなわち $\varsigma=0$ 点まわりの経路であって、半径を1より小さな円にとれば $R\neq 0$.

留数定理　零点は$\varsigma=0$の点で$\ell+1$位の極

$= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \lim_{\varsigma\to 0} \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\varsigma^\ell}\frac{1}{R}$

$= \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\varsigma^\ell}\frac{1}{R}\Big|_{\varsigma=0}$

(7). (6)より $\varsigma=0$まわりでテイラー展開.

$\frac{1}{R} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\frac{d^\ell}{d\varsigma^\ell}\frac{1}{R}\Big|_{\varsigma=0}}{\ell!}\varsigma^\ell$

$= \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(t)\,\varsigma^\ell$

NO.
DATE

(8). $r_> = \max(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$, $r_< = \min(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r_>^2 + r_<^2 - 2 r_< r_> \hat{r}\cdot\hat{r}'}}$$

$$= \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 + (r_</r_>)^2 - 2(r_</r_>)\hat{r}\cdot\hat{r}'}}$$

(7) で導いた式を使うと,

$$= \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\hat{r}\cdot\hat{r}') \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\hat{r}\cdot\hat{r}')$$

ここで, 球面調和関数の加法定理

$$P_l(\hat{r}\cdot\hat{r}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

より,

$$= 4\pi \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

(9). 局所的な電荷分布 $\rho(\vec{r})$, 十分遠方の静電 potential $\phi(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') 4\pi \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}') \qquad (\vec{r} > \vec{r}')$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\hat{r}) \frac{1}{r^{l+1}} \underbrace{\int d^3r' r'^l \rho(\vec{r}') Y_{lm}^*(\hat{r}')}_{\llcorner\, q_{lm}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\hat{r})$$

問題2.

(1). $R|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = R(|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle)$

$= R|j_1 m_1\rangle \otimes R|j_2 m_2\rangle$

$= |j_1 m_1'\rangle D^{j_1}_{m_1' m_1}(R) \otimes |j_2 m_2'\rangle D^{j_2}_{m_2' m_2}(R)$

$= |j_1 m_1'\, j_2 m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1' m_1}(R)\, D^{j_2}_{m_2' m_2}(R)$

一方、$|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = |jm\rangle\langle jm|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$ なので、

$R|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = R|jm\rangle\langle jm|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$

$= |jm'\rangle D^{j}_{m' m}(R)\langle jm|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$

(2). (1)から、

$|j_1 m_1'\, j_2 m_2'\rangle D^{j_1}_{m_1' m_1}(R)\, D^{j_2}_{m_2' m_2}(R) = |jm'\rangle D^{j}_{m' m}(R)\langle jm|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$

左から $\langle j_1 m_1'\, j_2 m_2'|$ をかけて

$D^{j_1}_{m_1' m_1} D^{j_2}_{m_2' m_2} = \langle j_1 m_1'\, j_2 m_2'|jm'\rangle D^{j}_{m' m}\langle jm|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$

(3). $Y_{lm}(\beta,\alpha) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,[D^{l}_{m0}(\alpha,\beta)]^*$

$j_1 = l_1$, $j_2 = l_2$ と書きかえて、$m_1 = m_2 = 0$ とすると、$m = m_1 + m_2 = 0$ で、

$\sqrt{\frac{4\pi}{2l_1+1}}\, Y^*_{l_1 m_1'}(\beta,\alpha)\sqrt{\frac{4\pi}{2l_2+1}}\, Y^*_{l_2 m_2'} = \langle l_1 m_1'\, l_2 m_2'|l m'\rangle\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y^*_{lm'}\langle l0|l_1 0\, l_2 0\rangle$

複素共役をとる。Clebsch-Gordan係数は実なので、

$Y_{l_1 m_1}(\beta,\alpha)\, Y_{l_2 m_2}(\beta,\alpha) = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2l+1)4\pi}}\, Y_{lm}(\beta,\alpha)\langle l_1 m_1\, l_2 m_2|lm\rangle\langle l0|l_1 0\, l_2 0\rangle$

($m_1' = m_1$, $m_2' = m_2$, $m' = m$ と書きかえた)。

$Y^*_{lm}(\beta,\alpha)$との内積を計算する。球面調和関数は規格直交系で

$\int_0^{\pi} d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\alpha\, Y^*_{lm}(\beta,\alpha)\, Y_{l'm'}(\beta,\alpha) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

なので、

$\int_0^{\pi} d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\alpha\, Y^*_{lm}(\beta,\alpha)\, Y_{l_1 m_1}(\beta,\alpha)\, Y_{l_2 m_2}(\beta,\alpha)$

$= \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2l+1)4\pi}}\langle l_1 m_1\, l_2 m_2|lm\rangle\langle l0|l_1 0\, l_2 0\rangle$