# 演習問題 4 :スピンとパウリ行列

問題 1.　パウリ行列 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ について考えよう。なお 2 次元単位行列を $E_2$ とせよ。

(1) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = E_2$ を示せ。

(2) $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$ を示せ。

(3) $\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$ を示せ。

(4) $\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$ を示せ。

(5) $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ としたとき, $\boldsymbol{S}$ が角運動量の交換関係 $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k$ を満たすことを示せ。

(6) $S_z$ の固有値 $\hbar m$ と固有ベクトル $|m\rangle$ を求めよ。

(7) パウリ行列を用いて $\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ を求めよ。

(8) $\boldsymbol{S}^2|m\rangle$ を求め、$|m\rangle$ が $\boldsymbol{S}^2$ の固有ベクトルになっていることを示し、その固有値を $\hbar^2 S(S+1)$ と書いたときの $S > 0$ を求めよ。

(9) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_z + ia_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_z & b_x - ib_y \\ b_z + ib_y & -b_z \end{pmatrix}$ を計算せよ。これから $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})E_2 + i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}$ となることがわかる。

問題 2.　3 次元単位ベクトル $\tilde{\boldsymbol{n}} = (n_x, n_y, n_z)$, $(|\boldsymbol{n}| = 1)$ に関して以下の関係式を導こう。

$$e^{i\varphi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} \;=\; E_2\cos\varphi + i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\varphi \qquad (*)$$

(1) $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = E_2$ を示せ。

(2) $P_\pm = \frac{1}{2}\big[E_2 \mp \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\big]$ に対して $P_\pm^2 = P_\pm$ を示せ。

(3) $P_+P_- = 0$, $P_-P_+ = 0$ を示せ。

(4) $P_+ + P_-$ を計算せよ。

(5) $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})P_\pm = \pm P_\pm$ を示せ。

(6) $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = P_+ - P_-$ を用いて、自然数 $n$ に対して次の関係を示せ。

$$(i\varphi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^n \;=\; (i\varphi)^n P_+ + (-i\varphi)^n P_-$$

(7) $e^{i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{n=0}^{\infty}(i\varphi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^n/n!$ から (*) を導け。

(8) $\boldsymbol{n}$ を単位球面上のベクトルとみて極座標 $n_x = \cos\phi\sin\theta$, $n_y = \sin\phi\sin\theta$, $n_z = \cos\theta$ を用いて $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ を書き、$u'_N = P_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $v'_N = P_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を求めよ。

(9) $u_N = u'_N/|u'_N|$, $v_N = v'_N/|v'_N|$ を求めよ。これらは $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の固有値 $+1$, $-1$ の規格化された固有ベクトルである。

(10) $u'_S = P_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $v'_S = P_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ として $u_S = u'_S/|u'_S|$, $v_S = v'_S/|v'_S|$ をもとめ、$u_N$ と $u_S$ および $v_N$ と $v_S$ の関係を求めよ。

(11) $P_+ = u_N u_N^\dagger = u_S u_S^\dagger$, $P_- = v_N v_N^\dagger = v_S v_S^\dagger$ を示せ。

問題 3. 時間反転対称操作 $\Theta = i\sigma_2\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ は複素共役) として、

(1) $\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ に対して $\Theta\boldsymbol{p}\Theta^{-1}$ をもとめよ。

(2) $\boldsymbol{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ に対して $\Theta\boldsymbol{S}\Theta^{-1}$ をもとめよ。

(3) $\Theta^2$ を計算せよ。

(4) 任意の状態 $\psi, \phi$ に対して $\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\Theta\phi|\Theta\psi\rangle$ を示せ。

(5) 任意の状態 $|\psi\rangle$, に対して $|\psi^\Theta\rangle = \Theta|\psi\rangle$ としたとき $\langle\psi|\psi^\Theta\rangle = 0$ を示せ。