演習問題 3 :角運動量と球面調和関数

問題 1.　軌道角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ について考えよう。

(1) $\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla}$ として $[r_i,p_j]$ を求めよ。

(2) $[L_i,L_j]$ を求めよ。

(3) $[L_i,r_j]$ を求めよ。

(4) $[L_i,p_j]$ を求めよ。

問題 2.　角運動量 $\boldsymbol{J}$ の基本的な関係式を導こう。$[J_i,J_j]=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}J_k$, $J_\pm=J_x\pm\mathrm{i}J_y$ である。

(1) $[\boldsymbol{J}^2,J_z]=0$ を導け

(2) $[J_z,J_\pm]$ を求めよ。

(3) $[J_+,J_-]$ を求めよ。

(4) $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{J}=\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{J}$ を示せ。

(5) $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{J}_2$ を異なる角運動量、つまりお互いに可換　($[J_{1i},J_{2j}]=0$) として $[\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{J}_2,J_{1z}+J_{2z}]$ を求めよ。

(6) $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2$　として $[\boldsymbol{J}^2,J_z]$ を計算せよ。

問題 3.　角運動量の固有関数 $|jm\rangle$ ($j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$, $m=-j,-j+1,\cdots,j-1,j$) を以下のとおり J^2,J_z の同時固有関数として

$$J^2|jm\rangle \;=\; \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle,\quad J_z|jm\rangle=\hbar m|jm\rangle$$

として、その相対的な位相を次のように定める（複合同順)。

$$J_\pm|jm\rangle \quad = \quad \hbar\sqrt{(j \pm +1)((j \mp m)}|jm \pm 1\rangle$$

(1) $J_+|jj\rangle = 0$, $J_-|j - j\rangle = 0$ を示せ。

(2) $j = \frac{1}{2}$ のとき、非自明な全ての関係式を書き下せ。

(3) $j = 1$ のとき、非自明な全ての関係式を書き下せ。

(4) 以下の関係式を示せ。

$$\langle jm|(J_+)^{m-m'}|jm'\rangle \quad = \quad \hbar^{m-m'}\left[\frac{(j+m)!}{(j+m')!}\frac{(j-m')!}{(j-m)!}\right]^{1/2}, \quad (m > m')$$

(5) 以下の関係式を示せ。

$$\langle jm|(J_-)^{m'-m}|jm'\rangle \quad = \quad \hbar^{m'-m}\left[\frac{(j+m')!}{(j+m)!}\frac{(j-m)!}{(j-m')!}\right]^{1/2}, \quad (m < m')$$

問題 4. 球面調和関数を順に導こう

(1) 3 次元極座標を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$, $(\Omega = |\theta, \phi\rangle)$ として各方向の単位ベクトル $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi) \equiv (\widehat{\partial_r \boldsymbol{r}}, \widehat{\partial_\theta \boldsymbol{r}}, \widehat{\partial_\phi \boldsymbol{r}})$ を求めよ。なおこれらは順に右手系の規格直交系の基底ベクトルである。$(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$, $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\phi)$。

(2) $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ を用いて $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ を極座標であらわせ。

(3) $L_+ = \hbar e^{i\phi}(\partial_\theta + \mathrm{i}\cot\theta\partial_\phi)$, $L_- = \hbar e^{-i\phi}(-\partial_\theta + \mathrm{i}\cot\theta\partial_\phi)$ を導け。

(4) $\boldsymbol{L}^2$ と L_z の同時固有状態を $|\ell m\rangle$ とし、$Y_{\ell m}(\Omega)=\langle\Omega|\ell m\rangle=\Theta_{\ell m}(\theta)\Phi_m(\phi)$ と変数分離形を仮定する。$L_zY_{\ell m}=\hbar mY_{\ell m}$ より $\Phi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}m\phi}$ を導け。ただし $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\phi|\Phi_m(\phi)|^2=1$ と規格化せよ。

(5) $L_+Y_{\ell\ell}=0$ から $\Theta_{\ell\ell}$ が満たす方程式が $\frac{\partial\Theta_{\ell\ell}}{\partial\theta}-\ell\cot\theta\Theta_{\ell\ell}=0$ となることを示せ。

(6) C_ℓ を定数として $\Theta_{\ell\ell}=C_\ell\sin^\ell\theta$ となることを示せ。

(7) $C_\ell=(-)^\ell C'_\ell, C'_\ell>0$ と符号を選び、規格化条件 $\displaystyle\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta|\Theta_{\ell\ell}(\theta)|^2=1$ より定数 C_ℓ が次のようになることを示せ。

$$C_\ell \;=\; (-)^\ell\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{2}}\frac{1}{2^\ell\ell!}$$

(8) $Y_{\ell\ell}$ に L_- を順に作用させることにより次のようになる。

$$Y_{\ell m}(\Omega) \;=\; (-)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\frac{e^{\mathrm{i}m\phi}}{\sqrt{2\pi}}\sin^{|m|}\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^{|m|}P_\ell(\cos\theta)$$

$Y_{\ell m}$, $(m=-\ell,\cdots,\ell)$ を $\ell=0,1,2$ について具体的に書き下せ。なお $P_\ell(t)=\dfrac{1}{2^\ell\ell!}\dfrac{d^\ell}{dt^\ell}(t^2-1)^\ell$ を ℓ 次のルジャンドル多項式と呼ぶ。

(9) ルジャンドル多項式が次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dP_\ell(t)}{dt}\right]+\ell(\ell+1)P_\ell(t) \;=\; 0$$

(10) 前問を用いルジャンドル多項式の以下の直交関係を示せ。

$$\int_{-1}^1 dt\,P_\ell(t)P_{\ell'}(t) \;=\; \delta_{\ell\ell'}\frac{2}{2\ell+1}$$