演習問題 2 :量子論における対称性と角運動量

問題 1. 量子力学における変換についてまとめよう。

(1) U がユニタリ演算子とはどういうことか

(2) ユニタリ演算子を $U = e^{i\lambda G/\hbar}$,$(\lambda \in \mathbb{R})$ と書いたとき、G が得るミート演算子となることを示せ。

(3) ユニタリ変換 U で波動関数は $|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ と変換する。このとき物理量 $A \to A'$ と変換するとして A' を U と A で表せ。ただし $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi'|A'|\psi'\rangle$ である。

(4) 物理量 $A = A^\dagger$ が無限小変換 $U = e^{i\delta\lambda G/\hbar}$, $(\delta\lambda \ll 1)$ による変換で不変なとき $[A, G] = 0$ となることを示せ。

(5) 時間に依存しないハミルトニアン H に対してシュレディンガー方程式 $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ の形式解が $|\psi\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$ であることを確認せよ。

(6) ハミルトニアンを不変にする無限小変換の母関数は運動の定数であることを示せ。

(7) 3 次元自由粒子系において運動量は保存するか計算はせずに物理的な理由とともに述べよ。

(8) ハミルトニアン $H = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m_z}$ で表される異方的な 3 次元自由粒子系において保存する角運動量は存在するか、物理的な理由とともに述べよ。

問題 2. 1 次元調和振動子のハミルトニアン $H_1 = H_x = \frac{\boldsymbol{p_x}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{x}^2$ を考えよう。

(1) これを古典系のハミルトニアンとして、ハミルトンの運動方程式を書き、その一般解が単振動であることを示せ。

(2) 以下この系を量子力学で取り扱う。$[x,p]=i\hbar$ として、以下の a_x が $[a,a^\dagger]=1$ を満たすことを示せ。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x+i\frac{p}{m\omega})$$

(3) H_1 を a であらわせ。

(4) $a|0\rangle=0$ となる $|0\rangle$ に対応する波動関数を $\psi(x)$ としたとき，$\psi(x)$ が満たす微分方程式を求め、$\psi_(x)$ を求めよ。

(5) $\hat{n}=a^\dagger a$ として $[\hat{n},(a^\dagger)^k]$, $k=0,1,2,\cdots$ を計算せよ。

(6) $|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^\dagger)^n|0\rangle$ が $\hat{n}$ の固有値 n の固有ケットであることを示せ。

(7) H_1 の固有値と規格直交化された固有ケットを求めよ。

(8) $a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$ を示せ。

(9) $a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$ を示せ。

問題 3. 2 次元調和振動子のハミルトニアン $H_2=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{p}^2$, $\widetilde{\boldsymbol{r}}=(x,y)$, $\widetilde{\boldsymbol{p}}=(p_x,p_y)$ を考えよう。

(1) 以下の演算子について $[a_i,a_j^\dagger]=\delta_{ij}$ を示せ。

$$a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(r_i+i\frac{p_i}{m\omega})$$

(2) $H_2=H_x+H_y$ であることを用いて H_2 の固有値と固有ケットを求めよ。もし縮退があればその縮退度も求めよ。

(3) $L_z=xp_y-yp_x$ としたとき，$[H_2,L_z]=0$ を示せ。

(4) L_z を a_x, a_y であらわせ。

(5) 以下の α, β について $[\alpha,\alpha^\dagger]=[\beta,\beta^\dagger]=1$, $[\alpha,\beta]=0$ を示せ。

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix}$$

(6) H_2 を α, β であらわせ。

(7) L_z を α, β であらわせ。

(8) H_z と L_z の同時固有ケットについてそれぞれの固有値を求めよ。

問題 4. 上記の議論を拡張し 3 次元の調和振動子を議論せよ。(ハミルトニアンを H_3 とする。)

(1) $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ が H_3 と可換であることを示せ。

(2) 同様に a_z も導入した時、ハミルトニアン H_3 を a_x, a_y, a_z でかけ。

(3) 各エネルギー固有状態の縮退度を述べよ。

(4) $L_\pm = L_x \pm iL_y$ としたとき, $\boldsymbol{L}^2 = \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_zL_z$ を示せ。

(5) $L_\pm$ を α, β, a_z でかけ。

(6) $|n_\alpha, n_\beta, n_z\rangle$ と書くとき、$\langle 000|\boldsymbol{L}^2|000\rangle$ を求めよ。

(7) $\langle 001|\boldsymbol{L}^2|001\rangle$ を求めよ。

(8) $\langle 010|\boldsymbol{L}^2|010\rangle$ を求めよ。

問題 5. ベクトル解析の幾つかの公式を導こう。

(1) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ に関して以下の関係式を示せ。

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) \;=\; (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$$

(2) $\epsilon_{iab}\epsilon_{icd} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}$ を示せ。

(3) $\epsilon_{ija}\epsilon_{ijb} = 2\delta_{ab}$ を示せ。

(4) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$ を示せ。