演習問題 6:1 次元 Ising 模型

問題 1. 磁場 $\boldsymbol{B}$ の下でのスピン 1/2 の 1 次元 Ising 模型のハミルトニアンは次のように表せる。ただしスピンは N 個あり、周期的境界条件 $S^z_{N+1}=S^z_1$ とする。

$$H_N \;=\; -J\sum_{i=1}^{N} S^z_i S^z_{i+1} - \mu B\sum_{i=1}^{N} S^z_i$$

(a) $N=2$ の時の分配関数 $Z_2=\mathrm{Tr}_{\{S_k\}}e^{-\beta H_2}$ を書き下せ。

(b) 分配関数は次のようにも書けることを $N=2$ の場合に具体的に書き出して確認せよ。

$$\begin{aligned}Z_N &= \mathrm{Tr}_{\{S_k\}}e^{-\beta H_N}\\ &= \mathrm{Tr}_{S_1=\pm1/2}\cdots\mathrm{Tr}_{S_N=\pm1/2}\ \exp\{-\beta\sum_k(-JS^z_kS^z_{k+1}+\frac{\mu B}{2}(S^z_k+S^z_{k+1})\}\\ &= \mathrm{Tr}_{S_1=\pm1/2}\cdots\mathrm{Tr}_{S_N=\pm1/2}\ T_{S_1S_2}T_{S_2S_3}\cdots T_{S_{N-1}S_N}T_{S_NS_1} = \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{T}^N\end{aligned}$$

ここで T_{ab} は転送行列 (transfer matrix) と呼ばれる 2×2 行列の (ab) 要素で以下のように定義される。

$$T_{ab}=\exp\{\beta Jab-\frac{\beta\mu B}{2}(a+b)\},\quad a,b=\pm\frac{1}{2}$$

まとめて、$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} e^{K-h} & e^{-K}\\ e^{-K} & e^{K+h}\end{bmatrix}$, $K=\dfrac{\beta J}{4}$, $h=\dfrac{\beta\mu B}{2}$ である。

(c) 転送行列 $\boldsymbol{T}$ の固有値 $\lambda_\pm$ $(\lambda_-\le\lambda_+)$ が次のようになることを示せ。

$$\lambda_\pm = e^K\big(\cosh h\pm\sqrt{\sinh^2 h+e^{-4K}}\big)$$

(d) 次の関係式を示せ。

$$Z_N = e^{-\beta f_N}=\lambda_+^N+\lambda_-^N=\lambda_+^N\big\{1+\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^N\big\}$$

(e) 1つのスピンあたりの自由エネルギー $\bar f$ が $N\to\infty$ で次のようになることを示せ。

$$\bar f=\lim_{N\to\infty}\frac{f_N}{N}=-\frac{1}{\beta}\log\lambda_+$$

(f) 内部エネルギー E が次のようになることを説明せよ。

$$E = \langle H \rangle = \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\, He^{-\beta H} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta f)$$

(g) 磁場がない時スピンあたりの自由エネルギーが $\bar{f} = -\frac{1}{\beta}\log 2\cosh K$ となることを示せ。

(h) この時のエネルギーが $e = -\frac{J}{4}\tanh K$ となることを示せ。

(i) この時の比熱　$C = \frac{de}{dT}$ を求め、図示せよ。

(j) 磁化 $m = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial B}$ が次のようになることを示せ。

$$m = \frac{\mu}{2}\frac{\sinh h}{\sqrt{\sinh^2 h + e^{-4K}}}$$

(k) 次の 2 つの極限を示せ。

$$\lim_{h\to 0}\lim_{T\to 0} m = \frac{\mu}{2}\,\mathrm{sgn}\, h, \qquad \lim_{T\to 0}\lim_{h\to 0} m = 0$$

(l) 帯磁率 $\chi = \left.\frac{\partial m}{\partial B}\right|_{B=0}$ を計算し図示せよ。

(m) 以上の結果を平均場近似の結果と比較し議論せよ。