5/22/2015 分　ノートまとめ

○ 球面調和関数

前回の授業より,

$$L_+[e^{im\phi}f(\theta)] = -\hbar e^{i(m+1)\phi}\sin^{m+1}\theta \times \frac{d}{d\cos\theta}[\sin^{-m}\theta f(\theta)]$$

$$L_-[e^{im\phi}f(\theta)] = \hbar e^{i(m-1)\phi}\sin^{-(m-1)}\theta \times \frac{d}{d\cos\theta}[\sin^{m}\theta f(\theta)]$$

なので,

$$L_+^k[e^{im\phi}] = (-\hbar)^k e^{i(m+k)\phi}\sin^{m+k}\theta \times\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^k[\sin^{-m}\theta f(\theta)]$$

$$L_-^k[e^{im\phi}] = \hbar^k e^{i(m-k)\phi}\sin^{-(m-k)}\theta \times\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^k[\sin^{m}\theta f(\theta)]$$

である。

Y_{ll} について,

$$L_+Y_{ll} = L_+\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{il\phi}\Theta_{ll}(\theta)\right]$$

$$= -\hbar e^{i(l+1)\phi}\sin^{l+1}\theta \times \underbrace{\frac{d}{d\cos\theta}\left(\sin^{-l}\theta\,\Theta_{ll}(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}_{※}$$

$$\downarrow$$

$$\sin^{-(l+1)}\theta(-\cot\theta)\Theta - \sin^{-l}\theta\frac{d\Theta}{d\cos\theta}$$

$$= \sin^{-(l+1)}\theta\left(-l\cot\theta\,\Theta_{ll} + \frac{d}{d\theta}\Theta_{ll}\right)$$

$= 0$ であるべき ($\because L_+Y_{ll} = 0$) なので,

$$\frac{d}{d\theta}\Theta_{ll} = l\cot\theta\,\Theta_{ll}$$

$\hookrightarrow \Theta_{ll} = C\sin^l\theta$ が解である。

また,

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\,(※) = 1 \text{ について,}$$

$$\int_0^\pi d\theta\,|H(\theta)|^2\sin\theta = 1$$

より,

$$|C|^2\int_0^\pi d\theta\sin^{2l+1} = 1$$

$$\therefore C = (-1)^l\sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}\frac{1}{2^l l!}$$

したがって,

$$Y_{ll} = (-1)^l\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\frac{1}{2^l l!}e^{il\phi}\sin^l\theta$$

つぎに, $|lm\rangle = |l0\rangle\ (m=0)$ について,

$$|l0\rangle = \hbar^{-l}\left[\frac{l!}{(2l)!}\frac{0!}{l!}\right]^{1/2}L_-^l|ll\rangle$$

なので,

$$Y_{l0} = \hbar^{-l}\frac{1}{\sqrt{(2l)!}}L_-^lY_{ll}$$

$$= (-1)^l\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\frac{1}{2^l l!}\frac{d}{d\cos\theta}\sin^{2l}\theta$$

$$(\sin^{2l}\theta = (\cos^2\theta-1)^l(-1)^l)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\,P_l(\cos\theta)$$

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l$$

↑ルジャンドル多項式

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

そして, $m>0$ について, $|lm\rangle$ を考えて,

$$Y_{lm} = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^m P_l(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$m' = -m,\ m>0$ について, $|l\,{-m}\rangle$ を考えて,

$$Y_{lm'} = Y_{l-m}$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^m P_l(\cos\theta)e^{-im\phi}$$

と求められる。