5/26(火) 量子力学3　5/22(金)授業分まとめ

学籍番号201210845　名前 桐り 俊貴　A

・球面調和関数

角運動量演算子 $\vec{L}$ を3次元の極座標で表すと、

$$\vec{L} = \hbar \begin{pmatrix} i\sin\varphi \\ -i\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \partial_\theta + \hbar \begin{pmatrix} i\cos\varphi\cot\theta \\ i\sin\varphi\cot\theta \\ -i \end{pmatrix} \partial_\varphi \quad \cdots ①$$

と書ける。よって、

$$L_+ = L_x + iL_y = \hbar(i\sin\varphi\partial_\theta + i\cos\varphi\cot\theta\partial_\varphi) + i\hbar(-i\cos\varphi\partial_\theta + i\sin\varphi\cot\theta\partial_\varphi)$$

$$= \hbar(\cos\varphi + i\sin\varphi)\partial_\theta + i\hbar\cot\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi)\partial_\varphi$$

$$= \hbar e^{i\varphi}\partial_\theta + i\hbar\cot\theta\, e^{i\varphi}\partial_\varphi$$

$$= \hbar e^{i\varphi}(\partial_\theta + i\cot\theta\,\partial_\varphi) \quad \cdots ②$$

$$L_- = L_x - iL_y = \hbar(i\sin\varphi\partial_\theta - i\cos\varphi\cot\theta\partial_\varphi) - i\hbar(-i\cos\varphi\partial_\theta + i\sin\varphi\cot\theta\partial_\varphi)$$

$$= \hbar e^{-i\varphi}(-\partial_\theta + i\cot\theta\,\partial_\varphi) \quad \cdots ③$$

$$L_z = -i\hbar\partial_\varphi \quad \cdots ④$$

である。

L^2 と L_z の同時固有状態を $|lm\rangle$ とし、$Y_{lm}(\Omega) = \Theta_{lm}(\theta)\Phi(\varphi)$ と変数分離形を仮定する。

$$L^2 Y_{lm} = \hbar l(l+1) Y_{lm} \quad \cdots ⑤$$

$$L_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm} \quad \cdots ⑥$$

$$L_+ Y_{ll} = L_- Y_{ll} = 0 \quad \cdots ⑦$$

であり、④、⑥より、

$$-i\hbar\partial_\varphi \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = \hbar m\,\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\therefore \frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi} = im\Phi(\varphi). \iff \Phi(\varphi) = A e^{im\varphi}$$

となり、関数の一価性から $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$ でなければならないから、$e^{2\pi mi} = e^0 = 1$ を満たす必要がある。よってこのとき $m = 0, \pm1, \pm2 \cdots$ とわかる。ここで規格化条件から

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2 d\varphi = 1$$

$$(左辺) = A^2\int_0^{2\pi} |e^{im\varphi}|^2 d\varphi = A^2\int_0^{2\pi} |\cos m\varphi + i\sin m\varphi|^2 d\varphi$$

$$= A^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi)\,d\varphi = A^2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi A^2$$

$$\therefore 2\pi A^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (A>0をえらんだ).$$

以上より、

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \cdots). \quad \cdots ⑧$$

である。

次に⑦より

$$L_+ Y_{ll} = \hbar e^{i\varphi}(\partial_\theta + i\cot\theta\,\partial_\varphi)\Theta_{ll}(\theta)\Phi_l(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\varphi)\,\partial_\theta\Theta_{ll}(\theta) + i\cot\theta\,\Theta_{ll}(\theta)\,\partial_\varphi\Phi_l(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi}\partial_\theta\Theta_{ll}(\theta) + i\cot\theta\,\Theta_{ll}(\theta)\cdot\frac{il}{\sqrt{2\pi}}e^{il\varphi} = 0 \quad (\because ⑧)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\Theta_{ll}}{\partial\theta} - l\cot\theta\,\Theta_{ll} = 0 \quad \text{–⑨}$$

である。$\Theta_{ll}(\theta) = C_l \sin^l\theta$ と仮定すると、

$$⑨(左辺) = C_l\, l \sin^{l-1}\theta - l\frac{\cos\theta}{\sin\theta}C_l\sin^l\theta = 0$$

となるので、$\Theta_{ll}(\theta) = C_l\sin^l\theta$ は ⑨の微分方程式を満たす。
$C_l = (-1)^l C_l'$, $C_l' > 0$ とえらび 次の規格化条件から、C_l' を導く。

$$\int_0^\pi \sin\theta\,|\Theta_{ll}|^2 = 1$$

$$(左辺) = C_l'^2\int_0^\pi \sin^{2l+1}\theta\,d\theta = C_l'^2\int_{-1}^{1} -(1-t^2)^l dt \quad (t=\cos\theta とおいた).$$

$$= 2C_l'^2\int_0^1 (1-t^2)^l dt = 2C_l'^2\int_0^1 (1-t)^l(1+t)^l dt.$$

$$= 2C_l'^2\cdot\frac{-l}{l+1}\int_0^1 -(1-t)^{l-1}(1+t)^l dt$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{2\cdot l!}{(2l)!}\int_0^1 (1+t)^{2l}dt\cdot C_l'^2$$

$$= \frac{2^{2l+1}\cdot(l!)^2}{(2l+1)!}C_l'^2$$

$$\therefore\ C_l' = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}\cdot\frac{1}{2^l(l!)}$$

$$\therefore\ C_l = (-1)^l\sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}\cdot\frac{1}{2^l(l!)}$$

Y_{ll} に L_- を順に作用させると、

$$Y_{lm} = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)\,e^{im\varphi} \quad (m>0)$$

$$Y_{lm'} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\left[\frac{d}{d\cos\theta}\right]^m P_l(\cos\theta)\,e^{-im\varphi} \quad (m'=-m,\ m>0)$$

と書ける。

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l$$

を l 次のルジャンドル多項式と呼ぶ。