No.

DATE

量子力学3 第3回 201310888 宮川 銀次郎

角運動量の一般化を行って、L を J に拡張

$J^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ として、

$[J^2, J_i]$ $i=x,y,z$

$= [J_x^2 + J_y^2, J_z] = J_x[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_x + J_y[J_y, J_z] + [J_y, J_z]J_y$

$= J_x(-i\hbar J_x J_y - i\hbar J_y J_x + i\hbar J_y J_x + i\hbar J_x J_y) = 0$.

ゆえに、$[J^2, J_i]$ $i=x,y,z$ $=0$

から、J^2 と J_i $i=x,y,z$ は同時固有状態を作ることができる。以下 $i=x,y,z$.

同時固有ケットを $|j,m\rangle$ として、

$J^2|j,m\rangle = A|j,m\rangle$, $J_i|j,m\rangle = B|j,m\rangle$

天下り的ではあるが、J^2 の固有値 A を

$A = \hbar^2 j(j+1)$,

J_i の固有値 B を $B = \hbar m$ と書く。

但し、$|j,m\rangle$ は規格直交完全である。

この固有値 A, B の関係を導くため、m の値域を定める必要がある。

これも天下り的ではあるが、新たに $J_\pm$ を定義する。

$J_\pm \equiv J_x \pm iJ_y$, $J_\pm^\dagger = J_x \mp iJ_y = J_\mp$

とする。この $J_\pm$ についての公式を6つ立てる。

① $[J^2, J_\pm] = 0$

② $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$

③ $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$.

④ $J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$.

⑤ $J_+J_- = J^2 - J_z(J_z - \hbar)$

⑥ $J_-J_+ = J^2 - J_z(J_z + \hbar)$.

$J_\pm$ を $|j,m\rangle$ に作用させたときの振舞いをみるために、

$\langle j,m|②|j,m'\rangle$ を考える。

$\langle j,m|[J_z, J_\pm]|j,m'\rangle = \pm\hbar\langle j,m|J_\pm|j,m'\rangle$

また、

$\langle j,m|[J_z, J_\pm]|j,m'\rangle = \langle j,m|J_z J_\pm|j,m'\rangle - \langle j,m|J_\pm J_z|j,m'\rangle$

$= \hbar(m-m')\langle j,m|J_\pm|j,m'\rangle$

∵ $\langle j,m|J_z = (J_z|j,m\rangle)^\dagger = \hbar m\langle j,m|$

∴ $\hbar(m-m')\langle j,m|J_\pm|j,m'\rangle = \pm\hbar\langle j,m|J_\pm|j,m'\rangle$

$\hbar(m-m'\mp1)\langle j,m|J_\pm|j,m'\rangle = 0$.

よって、

$\langle j,m|J_\pm|j,m'\rangle \neq 0$ は $m-m'\mp1=0$.

$\langle j,m|J_\pm|j,m'\rangle = 0$ は $m-m'\mp1\neq0$ … (1)

で実現できる。

さらに、②$|j,m\rangle$ を考えると、

②$|j,m\rangle = J_z(J_\pm|j,m\rangle) - J_\pm(J_z|j,m\rangle)$

$= J_z(J_\pm|j,m\rangle) - \hbar m(J_\pm|j,m\rangle)$

$= \pm\hbar(J_\pm|j,m\rangle)$

∴ $J_z(J_\pm|j,m\rangle) = \hbar(m\pm1)(J_\pm|j,m\rangle)$

これは $J_\pm$ が $|j,m\rangle$ に対して

$J_\pm|j,m\rangle \propto c_\pm|j,m\pm1\rangle$ ($c_\pm \in \mathbb{C}$)

と作用していることを示し、

J_+ は上昇演算子、J_- は下降演算子として (1) と合わせて全ての m の状態を構成できるようになる。

この $c_\pm$ は規格化定数なので、$|j,m\pm1\rangle$ の内積が1となるように定めれば良い。

$\langle j,m\pm1|j,m\pm1\rangle = |c_\pm|^2 (J_\pm|j,m\rangle)^\dagger J_\pm|j,m\rangle$

$= |c_\pm|^2\hbar^2\{j(j+1) - m(m\pm1)\}$

∵ $\langle j,m|j,m\rangle = 1$.

∴ $|c_\pm|^2 = \hbar^2\{j(j+1) - m(m\pm1)\}$.

$= \begin{cases} \hbar^2(j-m)(j+m+1) & \text{for } + \\ \hbar^2(j+m)(j-m+1) & \text{for } - \end{cases}$

DATE

よって, $J_\pm|j,m\rangle = c_\pm|j,m\pm1\rangle$ から,

$$|j,m\pm1\rangle = c_\pm^{-1} J_\pm|j,m\rangle$$
$$= \frac{e^{i\theta}}{\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}} J_\pm|j,m\rangle \cdots ⑦$$

∵ $c\in\mathbb{C}$ で位相成分 $e^{i\theta}$ が入る.
しかし, 今回 $e^{i\theta}=1$ として計算を楽にする.

ここまでで $J_\pm$ と $|j,m\rangle$ の m の振舞いを見た。
次に, j と m との関係を明らかにする。

$$\begin{cases} J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle, \\ J_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \end{cases}$$

の2式から求めることができる.

$J^2 - J_z^2 = J_x^2 + J_y^2$ を考えてみる. ここで
J_i うち $i = x, y, z$ について, $|\beta\rangle \equiv J_i|\alpha\rangle$ とすると
J_i は エルミート だから $\langle\alpha|J_i^2|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle$
より J_i^2 の固有値は負でない。
つまり $J^2 - J_z = J_x^2 + J_y^2$ の固有値も負でない。
$J^2 - J_z^2|j,m\rangle = \hbar^2\{j(j+1) - m^2\}|j,m\rangle$
から, $j(j+1) - m^2 \geq 0$.

∴ $-\sqrt{j(j+1)} \leq m \leq \sqrt{j(j+1)} \cdots (2)$

よって m の値域を j で表せた。

しかし, $[J^2, J_z] = 0$ だったことを思い出すと,
$J^2 J_\pm|j,m\rangle = J_\pm J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1) J_\pm|j,m\rangle$
かつ, $J_z J_\pm = J_\pm(J_z \pm \hbar)$ から,

$$J_z J_\pm|j,m\rangle = J_\pm(J_z \pm \hbar)|j,m\rangle$$
$$= \hbar(m\pm1) J_\pm|j,m\rangle$$

つまり $J_\pm|j,m\rangle$ も J^2 と J_z の同時固有ケット.
固有値はそれぞれ $\hbar^2 j(j+1)$, $\hbar(m\pm1)$

なんと $J_\pm$ は J^2, J_z の固有値も ±1 にする!

そうすると, (2) の条件を満たすには,

$$\begin{cases} J_+|j,m_{max}\rangle = 0 \\ J_-|j,m_{min}\rangle = 0. \end{cases}$$

である必要がある. m_{max} m_{min} は
m の最大値と最小値.
$|j,m_{max}+1\rangle$, $|j,m_{min}-1\rangle$ があるとして,
公式⑦から,

$$|j,m_{max}+1\rangle = \hbar\sqrt{(j+m_{max}+1)(j-m_{max})} = 0.$$
$$|j,m_{min}-1\rangle = \hbar\sqrt{(j-m_{min}+1)(j+m_{min})} = 0.$$

よって $\begin{cases} m_{max} = j, & J_+|j,j\rangle = 0, \\ m_{min} = -j, & J_-|j,-j\rangle = 0. \end{cases}$

から $-j \leq m \leq j \cdots (3)$
(2) の値域よりも狭いので, (3) を採用することになる。

具体的に考えてみると, j のとりうる値がわかる.
$|j,j\rangle$ に J_- をいくつもかけてみると, k 回目で,
$J_-|j,j\rangle \to |j,j-1\rangle \cdots J_-|j,j-k\rangle \to |j,j-k-1\rangle$
最小値は $-j$ より, $j-k = -j$ となる k が

あるはずで, $k = 0, 1, 2\ldots$ という整数だから,

$$j = \frac{k}{2};\ k = 0, 1, 2\ldots$$

$\{j\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\ldots\}$
という半奇整数となる.

m はその j に対応して,

$$\{m\} = \{j, -j+1 \ldots, 0, \cdots j-1, j\}$$

となる.

以上により, J^2 と J_z の同時固有ケット $|j,m\rangle$
の j と m を量子化できた。