量子力学3　第6回授業まとめ

201310851　金杉 翔太

☆Quantization of angular momentum (角運動量の量子化)

Generically

$\mathbb{L} = \mathbb{r} \times \mathbb{p}$, $L_i^\dagger = L_i$ $L_i = \varepsilon_{ijk} r_j p_k$ $(i = x, y, z)$ $[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k$ $[\mathbb{L}^2, L_i] = 0$	$\Longrightarrow$	$\mathbb{J}$, $J_i^\dagger = J_i$ $\mathbb{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ $[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$ $[\mathbb{J}^2, J_i] = 0$

$[\mathbb{J}^2, J_z] = 0$ より、$\mathbb{J}^2$ と J_z は同時固有状態 (simultaneous eigen state) を持つので、

$$\mathbb{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$
$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

ここで $m, j(j+1) \in \mathbb{R}$ であり、$|j, m\rangle$ は規格直交完全系をなすので、

$$\begin{cases} \langle j, m | j', m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ \sum_{j,m} |j, m\rangle\langle j, m| = 1 \end{cases}$$

また、$\langle j, m | J_z | j, m\rangle = \hbar m$ より、$J_z \sim \hbar m$ となり、J_z は量子化されている。

$J_\pm \equiv J_x \pm i J_y$ とすると以下の定理が成り立つ。

$$\begin{cases} [\mathbb{J}^2, J_\pm] = 0 & \text{— ①} \\ [J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm & \text{— ②} \\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z & \text{— ③} \\ \mathbb{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2 & \text{— ④} \\ J_+ J_- = \mathbb{J}^2 - J_z(J_z - \hbar) & \text{— ⑤} \\ J_- J_+ = \mathbb{J}^2 - J_z(J_z + \hbar) & \text{— ⑥} \end{cases}$$

② より、

$$\begin{aligned} \langle j, m | [J_z, J_\pm] | j, m'\rangle = \pm \hbar \langle j, m | J_\pm | j, m'\rangle \\ &= \langle j, m | (J_z J_\pm - J_\pm J_z) | j, m'\rangle \\ &= \langle j, m | J_z J_\pm | j, m'\rangle - \langle j, m | J_\pm J_z | j, m'\rangle \\ &= \hbar(m - m') \langle j, m | J_\pm | j, m'\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore \hbar(m - m') \langle j, m | J_\pm | j, m'\rangle = \pm \hbar \langle j, m | J_\pm | j, m'\rangle$$
$$\therefore \hbar(m - m' \mp 1) \langle j, m | J_\pm | j, m'\rangle = 0$$

よって、

$$\begin{cases} \langle j, m | J_\pm | j, m'\rangle \neq 0 & \text{any if} & m = m' \pm 1 \\ \langle j, m | J_+ | j, m'\rangle = 0 & \text{if} & m - m' - 1 \neq 0 \\ \langle j, m | J_- | j, m'\rangle = 0 & \text{if} & m - m' + 1 \neq 0 \end{cases}$$

さらに②を用いると、$J_\pm|j,m\rangle$ について、

$$[J_z, J_\pm]|j,m\rangle = J_z(J_\pm|j,m\rangle) - J_\pm J_z|j,m\rangle$$
$$= J_z(J_\pm|j,m\rangle) - \hbar m(J_\pm|j,m\rangle)$$
$$= \pm\hbar(J_\pm|j,m\rangle)$$
$$\therefore J_z(J_\pm|j,m\rangle) = \hbar(m\pm1)(J_\pm|j,m\rangle)$$

よって、$J_\pm|j,m\rangle \propto |j,m\pm1\rangle$ であることが分かるので、$C_\pm \in \mathbb{C}$ として、

$$J_\pm|j,m\rangle = C_\pm|j,m\pm1\rangle$$

このように、J_+ は m を1だけ上げ、J_- は m を1だけ下げる働きがあるので、J_+ を上昇演算子、J_- を下降演算子という。

ここで、$|j,m\rangle$ は正規直交完全系を成すので、

$$1 = \langle j,m\pm1|j,m\pm1\rangle$$
$$= |C_\pm|^{-2}\langle j,m|J_\pm^\dagger J_\pm|j,m\rangle$$
$$= |C_\pm|^{-2}\langle j,m|J_\mp J_\pm|j,m\rangle$$
$$= |C_\pm|^{-2}\langle j,m|\{\mathbb{J}^2 - J_z(J_z\pm\hbar)\}|j,m\rangle \quad (\because ⑤, ⑥)$$
$$= |C_\pm|^{-2}\langle j,m|\{\hbar^2 j(j+1) - \hbar m(\hbar m\pm\hbar)\}|j,m\rangle$$
$$= |C_\pm|^{-2}\hbar^2\{j(j+1) - m(m\pm1)\}\langle j,m|j,m\rangle$$
$$= |C_\pm|^{-2}\hbar^2[j(j+1) - m(m\pm1)]$$
$$\therefore |C_\pm|^2 = \hbar^2[j(j+1) - m(m\pm1)]$$
$$= \hbar^2(j\pm m+1)(j\mp m)$$

よって、位相を1に選べば、

$$|j,m\pm1\rangle = \frac{1}{|C_\pm|}J_\pm|j,m\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j\pm m+1)(j\mp m)}}J_\pm|j,m\rangle \quad —— ⑦$$

また、④より、

$$\mathbb{J}^2 - J_z^2 = J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$$

であるから、

$$\langle j,m|(\mathbb{J}^2 - J_z^2)|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2$$
$$= \frac{1}{2}\langle j,m|(J_+J_- + J_-J_+)|j,m\rangle$$
$$= \frac{1}{2}[\langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle + \langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle]$$
$$= \frac{1}{2}[\|J_-|j,m\rangle\|^2 + \|J_+|j,m\rangle\|^2] \geq 0$$

$$\therefore j(j+1) - m^2 \geq 0$$
$$\therefore -\sqrt{j(j+1)} \leq m \leq \sqrt{j(j+1)} \quad —— ⑧$$

となり、m の値は⑧のように制限されていることが分かる。

ここで、

$$|j, m\pm k\rangle \propto J_\pm^k |j, m\rangle \qquad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

となるが、mが⑧のように制限されているので、⑧の条件を満たさないような$m\pm k$では、$|j, m\pm k\rangle = 0$ となる必要がある。よって、

$$J_+|j, m_{max}\rangle = 0$$

$$J_-|j, m_{min}\rangle = 0$$

m_{max}、m_{min} を⑦を利用して求める。⑦より、

$$\hbar\sqrt{(j+m_{max}+1)(j-m_{max})}\,|j, m_{max}+1\rangle = J_+|j, m_{max}\rangle = 0$$

⑧より、$j+m_{max}+1 \neq 0$ なので、上式より、

$$j-m_{max} = 0$$

$$\therefore m_{max} = j$$

同様に、

$$\hbar\sqrt{(j-m_{min}+1)(j+m_{min})}\,|j, m_{min}-1\rangle = J_-|j, m_{min}\rangle = 0$$

$$\therefore j+m_{min} = 0$$

$$\therefore m_{min} = -j$$

以上より、

$$-j \le m \le j,\quad J_+|j, j\rangle = 0,\quad J_-|j, -j\rangle = 0$$

また、$|j, j-k\rangle \propto J_-^k|j, j\rangle$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ となるので、あるkにおいて、$|j, j-k\rangle = |j, -j\rangle$ とならなければならない。よって、

$$j-k = -j$$

$$\therefore j = \frac{k}{2} \quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

よって、jのとりうる値は非負整数か半奇整数となり、

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \cdots\cdots$$

これより、mの値は

$$m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$$

という$(2j+1)$個の値に限られる。

$j=0$	$m=0$
$j=\frac{1}{2}$	$m=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
$j=1$	$m=-1, 0, 1$
$j=\frac{3}{2}$	$m=-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
⋮	⋮