4/24(金) 授業分まとめ

学籍番号 201210845　名前 [name]

A

・回転の無限小変換

原点まわりの回転 Rを考える。無限小変換であるから、Rは、単位行列に近い場合といえるので、

$$R = E_3 + \delta R$$

と書ける。

$$\vec{r} \to \vec{r}' = Rr, \quad |\vec{r}'|^2 = \tilde{\vec{r}}'\vec{r}' = (\widetilde{R\vec{r}})(R\vec{r}) = \tilde{\vec{r}}\tilde{R}R\vec{r} = r^2, \quad \tilde{R}R = E_3$$

となるのが、回転操作の特徴で、

$$\tilde{R}R = (E_3 + \delta\tilde{R})(E_3 + \delta R) = E_3 + \delta R + \delta\tilde{R} + \delta R\delta\tilde{R}$$

δR、$\delta\tilde{R}$ は、無限小であるから、$\delta R\delta\tilde{R}$ は無視できるので、

$$\tilde{R}R = E_3 + \delta\tilde{R} + \delta R = E_3$$

である。よって、$\delta\tilde{R} + \delta R = 0 \Leftrightarrow \delta\tilde{R} = -\delta R$ で、δRは、反対称行列といえる。

つまり、

$$(\delta\tilde{R})_{ij} = (\delta R)_{ji} = -(\delta R)_{ij} \quad 、\quad i=j \text{の時、} (\delta R)_{ij} = 0$$

と書けるから、ε_{ijk} と、無限小のベクトル ~~量~~ $\delta\vec{\omega}$ を使って、

$$(\delta R)_{ij} \equiv -\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k$$

と定義する。すると、

$$(\vec{r}')_i = (R\vec{r})_i = R_{ij}\vec{r}_j = (-\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k)_{ij}\vec{r}_j = r_j(E_3\delta R)_{ij}$$

$$= \vec{r}_j - \varepsilon_{ijk}\delta\omega_k\vec{r}_j$$

$$(\delta\vec{r})_i = \vec{r}'_j - \vec{r}_j = -\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k\vec{r}_j = \varepsilon_{ikj}\vec{r}_j\delta\omega_k$$

$$= (\delta\omega \times \vec{r})_i$$

$$\therefore \delta\vec{r} = \delta\vec{\omega} \times \vec{r}$$

これは、$\delta\vec{\omega}$ 方向に右ねじが進む時の、ねじが回転する方向を表す。

ここで、波動関数の変換を考えると、

$$\psi'(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r}) \quad 、\psi' \to \psi \quad \psi'(R\vec{r}) = \psi(\vec{r})$$

であり、

$$\delta\psi = \psi'(\vec{r}) - \psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r}) - \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \delta\vec{R}) - \psi(\vec{r})$$

$$= \psi(\vec{r}) - \delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\psi - \psi(\vec{r}) = -\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\psi = -(\delta\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi$$

$$= -\delta\vec{\omega}(\vec{r}\times\vec{\nabla})\psi = -i\delta\vec{\omega}(\vec{r}\times\vec{p})/\hbar\,\psi \quad (\because \vec{p} = \tfrac{\hbar}{i}\vec{\nabla})$$

$$= -i\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}/\hbar\,\psi \quad (\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} : \text{角運動量})$$

と表せる。一般に無限小変換は、

$$U = e^{-i\delta\lambda G/\hbar} \quad 、\delta\psi =$$

と書けることから、$\delta\lambda \sim \delta\vec{\omega}$、G(母関数) $\sim \vec{L}$ に対応している。

したがって、ハミルトニアンが不変な系では、$\vec{L}$：角運動量は、保存することがわかる。

・回転操作での物理量の変換則.

物理量Oが無限小変換 $U = e^{-i\delta\lambda G/\hbar} \sim 1 - i\delta\lambda G/\hbar$ で、変換されたとすると、

$$\langle O \rangle = \langle\psi|O|\psi\rangle = \langle\psi|O'|\psi\rangle = \langle\psi|U^{\dagger} O U|\psi\rangle$$

$$\therefore\ O' = U^{\dagger} O U$$

$$\delta O = O' - O = (1 + i\delta\lambda G/\hbar)\, O\, (1 - i\delta\lambda G/\hbar) - O = [G, O]\, i\delta\lambda/\hbar.$$

となる。無限小の回転では、どうなるかと考える。
先のまとめから、

$$G = -\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}$$

である。$\vec{r}$について、考えると、

$$\delta\vec{r} = [-\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}, \vec{r}]\, i/\hbar$$

$$\delta\vec{r}_i = \frac{i}{\hbar}[-\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}, \vec{r}_i] = -\frac{i}{\hbar}[\delta\vec{\omega}_j \vec{L}_j, \vec{r}_i] = -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j [\vec{L}_j, \vec{r}_i]$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j [(\vec{r}\times\vec{p})_j, \vec{r}_i] = -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j [\varepsilon_{jab}\vec{r}_a\vec{p}_b, \vec{r}_i]$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j \varepsilon_{jab}\vec{r}_a [\vec{p}_b, \vec{r}_i]$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j \varepsilon_{jab} r_a \{(-i\hbar)\delta_{bi}\} \qquad ([r_a, p_b] = \delta_{ab}\hbar i).$$

$$= \delta\omega_j \varepsilon_{jai} r_a = -\varepsilon_{jai}\delta\omega_j r_a.$$

$$= (-\delta\vec{\omega}_j \times \vec{r})_i.$$

つまり、

$$\delta\vec{r} = r\times\delta\vec{\omega} = -\delta\vec{\omega}\times\vec{r}$$

となる。次に、$\vec{p}$について、考えると、同様に計算して、

$$\delta\vec{p} = [-\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}, \vec{p}]\, i/\hbar$$

$$\delta\vec{p}_i = \frac{i}{\hbar}[-\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}, \vec{p}_i] = -\frac{i}{\hbar}[\delta\vec{\omega}_j \vec{L}_j, \vec{p}_i] = -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j [(\vec{r}\times\vec{p})_j, \vec{p}_i]$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j [\varepsilon_{jab}\vec{r}_a\vec{p}_b, \vec{p}_i] = -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j \varepsilon_{jab}\vec{p}_b [\vec{r}_a, \vec{p}_i]$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\delta\omega_j \varepsilon_{jab}\vec{p}_b \delta_{ai}(\hbar i) = \delta\omega_j \varepsilon_{jab}\delta_{ai}\vec{p}_b$$

$$= \delta\omega_j \varepsilon_{jib} p_b = (-\delta\omega\times p)_i$$

つまり、

$$\delta\vec{p} = -\delta\omega\times\vec{p}$$

となる。

次に、$\vec{L}$について考える。

$$\delta\vec{L} = [-\delta\omega\cdot\vec{L}, \vec{L}]\, i/\hbar$$

$$\delta\vec{L}_i = [-\delta\omega\cdot\vec{L}, \vec{L}_i]\, i/\hbar = -\frac{i}{\hbar}\delta\vec{\omega}_j[\vec{L}_j, \vec{L}_i] = \frac{i}{\hbar}\delta\vec{\omega}_j[\vec{L}_i, \vec{L}_j].$$

ここで、

$$\begin{aligned}
[\vec{L}_i, \vec{L}_j] &= [\varepsilon_{iab}\vec{r}_a\vec{p}_b, \varepsilon_{jcd}\vec{r}_a\vec{p}_d] = \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}[\vec{r}_a\vec{p}_b, \vec{r}_c\vec{p}_d]. \\
&= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\{\vec{r}_a[\vec{p}_b, \vec{r}_c\vec{p}_d] + [\vec{r}_a, \vec{r}_c\vec{p}_d]\vec{p}_b\} \\
&= i\hbar\,\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}(-\vec{r}_a\delta_{bc}\vec{p}_d + \vec{r}_c\delta_{ad}p_b). \\
&= -i\hbar\,\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\vec{r}_a\vec{p}_d + i\hbar\,\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}r_c p_b. \\
&= i\hbar\,\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jdb}r_a p_d - i\hbar\,\varepsilon_{iba}\varepsilon_{jca}r_c p_b \\
&= i\hbar(\delta_{ij}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{aj})r_a p_d - i\hbar(\delta_{ij}\delta_{bc} - \delta_{ic}\delta_{jb})r_c p_b. \\
&= i\hbar(\delta_{ij}\vec{r}\cdot\vec{p} - r_j p_i) - i\hbar(\delta_{ij}\vec{r}\cdot\vec{p} - r_i p_j) \\
&= i\hbar(r_i p_j - r_j p_i)
\end{aligned}$$

であり、

$$\varepsilon_{ijk}L_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kab}r_a p_b = (\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja})r_a p_b = r_i p_j - r_j p_i$$

だから、

$$\begin{aligned}
\delta\vec{L}_i &= \frac{i}{\hbar}\delta\vec{\omega}_j[\vec{L}_i, \vec{L}_j] = \frac{i}{\hbar}\delta\vec{\omega}_j(i\hbar\,\varepsilon_{ijk}L_k) = -\varepsilon_{ijk}\delta\vec{\omega}_j\vec{L}_k. \\
&= -\delta\omega_j\varepsilon_{ijk}\vec{L}_k \\
&= (-\delta\vec{\omega}\times\vec{L})_i.
\end{aligned}$$

つまり、

$$\delta\vec{L} = -\delta\vec{\omega}\times\vec{L}$$

と書ける。
一般に、~~物~~ $\delta\vec{V} = -\delta\vec{\omega}\times\vec{V}$ と変換する $\vec{V}$ をベクトル演算子という。したがって、$\vec{r}$、$\vec{p}$、$\vec{L}$ はすべて、ベクトル演算子として変換する。
そして、

$$\begin{aligned}
\delta\vec{V}^2 &= [-i\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}, \vec{V}\cdot\vec{V}]/\hbar = -\frac{i}{\hbar}[\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}, \vec{V}]\vec{V} + \vec{V}\cdot[\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}, \vec{V}]\left(-\frac{i}{\hbar}\right). \\
&= -\vec{V}(\delta\vec{\omega}\times\vec{V}) - (\delta\vec{\omega}\times\vec{V})\cdot\vec{V} = 0
\end{aligned}$$

となるから、内積は、変換で不変なスカラー演算子である。
よって、自由粒子系のハミルトニアン $H = \vec{p}^2/2m$、3次元の調和振動子 $H = \vec{p}^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ は回転に対して、角運動量を保存する。