NO 1

DATE

20131089O 保田 訟司

量子力学3 講義 2/7

・回転対称性

ex. 三角形 △

120°, 240°, 360° 回転で不変：回転対称性

R_{120}, R_{240}, R_{360}

$R_{360} = 1 = e$：単位元

$$\begin{cases} R_{120}\cdot R_{120} = R_{120}^2 = R_{240} \\ R_{240}\cdot R_{120} = R_{360} = e = 1 \end{cases}$$ 対称操作

・回転

$\vec{r} \longmapsto \vec{r}'$：長さ不変 $(|\vec{r}| = |\vec{r}'|)$

2次元.

$$\vec{r} \longmapsto \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{線型}$$

3次元.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underset{\sim}{R}\vec{r}$$

回転行列

$$\begin{aligned} |\vec{r}'|^2 &= \tilde{\vec{r}}'\,\vec{r}' \\ &= (x', y', z')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= (\widetilde{R\vec{r}})(R\vec{r}) \\ &= \tilde{\vec{r}}\,\tilde{R}\,R\,\vec{r} \\ &= \vec{r}\cdot\vec{r} \end{aligned}$$

$$\tilde{R}\cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

$$\tilde{R} = R^{-1}$$

$$RR^{-1} = R\cdot\tilde{R} = E_3$$

$$\det R = 1$$

直交

$$R = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ e_1 \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ e_2 \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ e_3 \\ \\ \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}\cdot R = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (e_1 \cdot e_2 \cdot e_3) = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot e_1 & \hat{e}_1 e_2 & \hat{e}_1 e_3 \\ \hat{e}_2 e_1 & \hat{e}_2 e_2 & \hat{e}_2 e_3 \\ \tilde{e}_3 e_1 & \hat{e}_3 e_2 & \tilde{e}_3 e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_i e_j = \delta_{ij}$$

$R^{-1} = \hat{R}$ とする.

$$\begin{aligned} \det(R - E_3) &= \det(\tilde{R} - E_3) \\ &= \det(R^{-1} - E_3) \\ &= \det R^{-1}(E_3 - R) \\ &= \det R^{-1} \det(E_3 - R). \\ &= -\det(R - E_3). \end{aligned}$$

→ $\det(R - E_3) = 0$

→ $(R - E_3)\vec{v} = 0$, $R\vec{v} = \vec{v}$

を満たす $\exists \underbrace{\vec{v}}_{\text{回転軸}} \neq 0$ の存在.

→ 3次元回転には回転軸が存在.

回転の表現 : $R_\theta(\vec{v})$.

回転軸 $\vec{v}$ と回転角 θ で表現

→ 回転操作は群をつくる

$R\vec{v} = \vec{v}$

⇒ $R(\vec{v})\cdot\vec{v} = \vec{v}$

ある回転 Q に対して,

$Q R_\theta(\vec{v})\cdot Q^{-1}\cdot Q\cdot\vec{v} = Q\vec{v}$

$(Q R_\theta(\vec{v})\cdot Q^{-1})\cdot(Q\vec{v}) = (Q\cdot\vec{v})$

$Q\cdot\vec{v}$ が回転軸.

$Q\cdot R_\theta(\vec{v})\cdot Q^{-1} = R'_\theta(\vec{v})$: 基底変換

Q は R を R' に移す回転

$R'_\theta(\vec{v})$ と $R_\theta(\vec{v})$ は同じ類に属する。

3次元オイラー角による表現（Rを回転の合成）

① z軸まわりにα回転 $R_\alpha(z)$

座標軸は $(x_1, y_1, z_1 = z)$ へ

② y_1軸まわりにβ回転 $R_\beta(y_1)$

座標軸は $(x_2, y_2 = y_1, z_2)$ へ　$R_\beta(y_1) = R_\alpha(z) R_\beta(y) R_\alpha^{-1}(z)$

③ z_2軸まわりにγ回転 $R_\gamma(z_2)$

$R_\gamma(z_2) = R_\beta(y_1) R_\gamma(z_1) R_\beta^{-1}(y_1)$

ここで，$R_\gamma(z_1) = R_\alpha(z) R_\gamma(z) R_\alpha^{-1}(z) = R_\gamma(z)$

$$
\begin{aligned}
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_\gamma(z_2) R_\beta(y_1) \cdot R_\alpha(z) \\
&= R_\beta(y_1) R_\gamma(z_1) \cdot \cancel{R_\beta^{-1}(y_1) R_\beta(y_1)} R_\alpha(z) \\
&= R_\alpha(z) \cdot R_\beta(y) \cdot \cancel{R_\alpha^{-1}(z) \cdot R_\alpha(z)} \cdot R_\gamma(z) \\
&= R_\alpha(z) \cdot R_\beta(\beta) \cdot R_\gamma(z)
\end{aligned}
$$

同軸まわりの回転は可換

R：回転行列，ψ：関数

$\psi(\vec{r}) \longmapsto R\psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1} \cdot \vec{r})$

$|\psi\rangle \longmapsto R|\psi\rangle$

$\vec{r}^R = R\vec{r}$

$$
\begin{aligned}
&(R \cdot \psi)(R \cdot \vec{r}) \\
&= (R \cdot \psi)\, \vec{r}^R \\
&= \psi(\vec{r})
\end{aligned}
$$

$\langle \psi | \psi \rangle = 1$

$\rightarrow \langle R\psi | R\psi \rangle = 1$

$(|R\psi\rangle)^\dagger |R\psi\rangle = \langle \psi | R^\dagger \cdot R | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$

$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ について

$[H, R] = 0$ なら，

$RH|\psi\rangle = HR|\psi\rangle = R|\psi\rangle E$

$R|\psi\rangle$ もHのエネルギーEの固有状態

固有値 E が d 重に縮退
$|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ … $|\psi_d\rangle$
$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$
$H|\psi_i\rangle = E|\psi_i\rangle \quad i = 1, 2, \cdots d$
R を作用.
$RH|\psi_i\rangle = HR|\psi_i\rangle = R|\psi_i\rangle E$
$R|\psi_i\rangle$ = 固有値 E の固有ベクトル
$\{|\psi_1\rangle, \cdots |\psi_d\rangle\}$ の線型結合
$\rightarrow \quad R|\psi_i\rangle = |\psi\rangle_j D_{ji}(R)$ と表現