20111085 1

NO. 九島禎洵

DATE . .

§ Symmetry in quantum mechanics

対称性

§1 Symmetry and Conserved quantities

保存則

Conservation law と symmetry operation　　↺ rotation とか

波動関数

☆ symmetry operation と wave function を考える

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (\text{シュレディンガー})$$

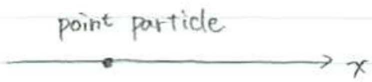
$\psi(\vec{r}, t)$: wave fun.

H : Hamiltonian

並進

(ex) translation (ずらす)

1次元



$\psi(x, t)$

transformation : 変換

$\boxed{\text{translation by } a}$ を $T_a : x \longmapsto x + a$ とする

$$\begin{cases} T_a : \psi(x, t) \longmapsto \psi'(x, t) \\ \psi' = T_a \psi \end{cases}$$

とかける。

ここで $T_a : x \longmapsto x' = x + a$ としたとき

$$\underbrace{\psi'(x') \equiv \psi(x)}_{\text{definition}}$$

NO.

DATE . .

$\psi'(x) = (T_a\psi)(x)$ となるが、

$\psi'(\underbrace{x}) = \psi(T_a^{-1}x) = \psi(x-a)$.

$\boxed{T_a(T_a^{-1}x) = x}$

Taylor展開

ここで $\psi(x-a) = \psi(x) + (-a)\partial_x\psi\Big|_{x=x} + \frac{1}{2!}(-a)^2\partial_x^2\psi\Big|_{x=x} + \cdots$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n!}\partial_x^n\psi\Big|_{x=x}$

$\left(\text{ここで } \exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \text{ なので}\right)$

$= e^{-a\partial_x}\psi \qquad \left(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}\right)$

よって $\psi' = e^{-a\partial_x}\psi$ とかける。

$U_a \equiv e^{-a\partial_x}$ とすれば、$\psi' = U_a\psi$ とかける

作用素

$U_a = e^{-a\partial_x}$: differential opperation

※ function → function を operationという

$= e^{-ia\frac{\partial_x}{i}}$ とかける。

運動量

ここで momentum $p_x = \frac{\hbar}{i}\partial_x$ だったので $\left(\text{hermite } p_x^\dagger = p_x\right)$

エルミート

$U_a = e^{-iap_x/\hbar}$ となる。

$$U_a^\dagger = \left(e^{-iap_x/\hbar}\right)^\dagger$$

$$= e^{+iap_x^\dagger/\hbar} = e^{iap_x/\hbar}$$ なので、

$$U_a U_a^\dagger = e^{-iap_x/\hbar} \cdot e^{iap_x/\hbar} = e^0 = 1$$

$\Leftrightarrow U_a U_a^\dagger = 1$: unitary operation

まとめ

T_a : translation のとき、

$\psi \to \psi' = U_a \psi$ とかける。
ここで U_a : unitary で、$U_a = e^{-iap_x/\hbar}$

$\Rightarrow$ 並進操作は unitary operator である!

NO.

DATE

次に… a : finite (有限) ← infinitensial の積分 なので….

☆ infinitensial transformation (無限小変換) について

$U = e^{-i\delta a\, p_x/\hbar}$ 　　δa : 十分小さい $|\delta a \cdot p_x| \ll \hbar$ とすると

$U_a = e^{-i\delta a\, p_x/\hbar} \sim 1 - i\delta a\, p_x/\hbar$ とかける

unitary transformation (一般の変換) では、

$U = e^{i\lambda G/\hbar}$ 　　(λ : real で $\lambda^* = \lambda$) として

$U^\dagger = e^{-i\lambda G^\dagger/\hbar} = U^{-1} = e^{-i\lambda G/\hbar}$ なので、

$G^\dagger = G$: hermite ((ex) $G = -p_x$ (momentum) for translation)

observable (観測可能) (Dirac が作った言葉)

この G を generator (母関数) という。

$\psi(x,t)$: wave function に対して

Θ : observable な physical quantity があったとき、

$$\langle \Theta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\, \Theta\, \psi(x)$$

$$= \langle \psi | \Theta | \psi \rangle$$ bra-ket notation (ブラケット記法)

(energy なら $\Theta = H$
momentum なら $\Theta : p = \frac{\hbar}{i} \partial_x$)

これに T : symmetric transformation をしたとき、

expectation value 期待値 $\langle \theta' \rangle' = \langle \psi' | \theta' | \psi' \rangle$

$\langle \theta' \rangle \equiv \langle \theta \rangle$, $\psi' = U\psi$ として考えていく。

$\langle \psi' | \theta' | \psi' \rangle = \langle \psi | U^{\dagger} \theta' U | \psi \rangle = \langle \psi | \theta | \psi \rangle$ なので、

$U^{\dagger} \theta' U = \theta \iff \boxed{\theta' = U \theta U^{\dagger}}$

物理量の変換則
transformation law of the observable

つまり、

$\psi \longmapsto \psi' = U\psi$ で

$\theta \longmapsto \theta' = U \theta U^{\dagger}$ になるっていうこと。

エルミート
operator (observable)

NO.

DATE

では、θ : invariant (不変) for the transformation by the symmetry opperation.

のときはどうなるのか？

$\theta \longmapsto \theta' = \theta$ 不変・θとθ'が同じ

つまり、$\theta' = U\theta U^{+} = \theta \Leftrightarrow U\theta = \theta U$ ∴ $[U, \theta] = 0$

$[U, \theta] \equiv U\theta - \theta U$ 交換子 commutator

互いに可換 commute with each other

無限小操作 infinitesimal transformation では
(U : unitary, $|\delta\lambda \cdot G| \ll \hbar$ くらい十分小さい)

$U_{\delta\lambda} = e^{i\delta\lambda G/\hbar} \sim 1 + i\delta\lambda G/\hbar$ より、

$U_{\delta\lambda}^{+} = U_{\delta\lambda}^{-1} = 1 - i\delta\lambda G/\hbar$ なので、

$$
\begin{aligned}
[U, \theta] &= U\theta - \theta U \\
&= (1 + i\delta\lambda G/\hbar)\theta - \theta(1 - i\delta\lambda G/\hbar) \\
&= (i\delta\lambda/\hbar)[G, \theta] = 0
\end{aligned}
$$

if 不変なら invariant for the transformation

まとめ

T: Symmetry operation で、

$\psi \longrightarrow \psi' = U\psi$ (ただし U: unitary)

$U = e^{i\lambda \cdot G/\hbar}$ (ただし λ: real)

G : hermite で generator

((ex) translation by a のとき

$x \rightarrow x+a$ で、$U = e^{-a\partial x}$ かつ $G = -p_x = -\frac{\hbar}{i}\partial x$)

また、θ : observable に対して

$\theta^{+} = \theta$ で、$\theta \mapsto \theta' = U\theta U^{+}$ なら、

$\langle \psi' | \theta' | \psi' \rangle = \langle \psi | \theta | \psi \rangle$

$\langle \psi | U^{+}\theta' U | \psi \rangle$

infinitesimal transformation では $U \sim 1 + i\delta\lambda G/\hbar$ で
$[G, \theta] = 0$ なら θ is invariant for the symmetry operation

(不変でないに) In general 一般では

$$\theta \rightarrow \theta' = U\theta U^{+}$$
$$= (1 + i\delta\lambda G/\hbar)\theta(1 - i\delta\lambda G/\hbar)$$
$$= \theta + i(\delta\lambda/\hbar)[G, \theta] + \cancel{\delta\lambda^2}$$ 微小項おとす

$$\delta\theta = \theta' - \theta$$
$$= i(\delta\lambda/\hbar)[G, \theta]$$ ← if invariant $[G, \theta] = 0$

NO.

DATE

次回に向けて…

Symmetric operation で、Rotation(回転) は少しめんどい。

physical(物理系) System において波動eq. は H で決まる

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi \qquad H^* = H$: hamiltonian

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Symmetry of the system} = \text{Hamiltonian の Symmetry}}$

(ex) System : Invariant $\Leftrightarrow$ Hamiltonian : Invariant

つまり、T : Symmetry operation に対して、

"System is invariant" $= [G, H] = 0$

問. $H = \frac{P_x^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m}$ ← free(自由粒子系) particle

は並進操作で不変？

translation $U = e^{-a\partial x} = e^{-iaP_x/\hbar}$ より $G = -P_x$

$[G, H] = [-P_x, \frac{P_x^2}{2m}] = 0$ なので、

System of free particle is invariant for the translation

Symmetry operation と Conserve について再考してみる。

シュレディンガー eq.

$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$

$\Leftrightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$ となるよね。

$\langle\psi(t)|O|\psi(t)\rangle = \langle O(t)\rangle$: O の時刻 t における期待値

$= \langle\psi(0)|e^{iHt/\hbar}\, O\, e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$

ここで用いた

$\Bigg($ ここで、T : invariant transformation

すなわち $O = G$, $[H, G] = 0$ ならば $\Bigg)$

$= \langle\psi(0)|O\, \cancel{e^{iHt/\hbar}}\, \cancel{e^{-iHt/\hbar}}|\psi(0)\rangle$

$= \langle\psi(0)|O|\psi(0)\rangle$

$= \langle O(0)\rangle$: O の時刻 0 における期待値

$\therefore \langle O(t)\rangle = \langle O(0)\rangle$ Conserved 保存量 quantity

time - Independent

つまり G は Conserve 保存する

Operation と Conserve が関係

物理系がある変換で保存されていたら、
ハミルトニアンは不変である!

(ex) $x \longmapsto x + a$: invariance

$H = \frac{P_x^2}{2m}$ P_x : conserve

NO.

DATE