量子力学3　理工学群 物理学類 3年　201310875　出口裕佳　6/2

(復習部分は省略
一般的な2つの角運動量 $\vec{J}_1, \vec{J}_2$ を合成する

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$
$$\left\{\begin{array}{l}[J^\alpha, J^\beta] = i\hbar\epsilon^{\alpha\beta\gamma}J^\gamma \\ J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \\ J_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \text{ (from 一般論)}\end{array}\right.$$

$$|j,m\rangle \leftarrow \vec{J}_1+\vec{J}_2 : J_1\otimes 1 + 1\otimes J_2$$
$$|j,m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle C^{(jm)}_{m_1 m_2}$$

linear combination (線型結合)

$$C^{(jm)}_{m_1 m_2} = \sum_{m_1 m_2} |jm\rangle\langle jm|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

CG係数

今までの例

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = \underset{\text{singlet}}{0}\oplus\underset{\text{triplet}}{1} \\ (2\times\frac{1}{2}+1)\times(2\times\frac{1}{2}+1) = 4 \quad 1 + 2\times1+1 = 4 \\ \frac{1}{2}\otimes 1 = \frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2} \\ (2\times\frac{1}{2}+1)\times(2\times1+1) = 6 \quad 4 + 2 = 6 \\ 1\otimes 1 = 2\oplus 1\oplus 0 \\ 3\times 3 \quad 5+3+1 \end{array}\right.$$

State counting
(基底を数える)
dimension??

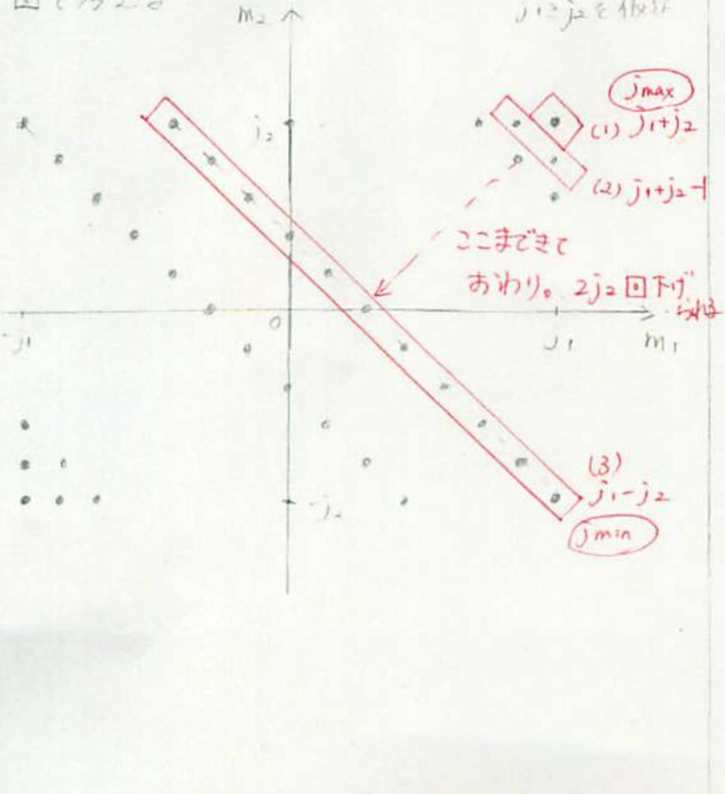
一般的に

$$j_1\otimes j_2 = j_{max}\oplus j_{max}-1\oplus \cdots \oplus j_{min}$$
$$j_{max} = j_1+j_2, \qquad j_{min} = |j_1-j_2|$$

$$|j_1, m_1\rangle\otimes|j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$
$$(2j_1+1)\times(2j_2+1)$$

図で考える

$j_1 \geq j_2$ を仮定



$|j,j\rangle$ (1) $j = m_1+m_2 = j_1+j_2$ $(= j_{max})$

$J^+|j_1, j_1, j_2, j_2\rangle = 0$ 上げられない

$$|j, j-1\rangle \propto J^-|j,j\rangle$$

$$J^-|j,j\rangle = \sum (J_1^- + J_2^-)|j_1, j_1, j_2, j_2\rangle$$
$$= \underbrace{\sum * |j_1, j_1-1, j_2, j_2\rangle + * |j_1, j_1, j_2, j_2-1\rangle}_{(2)}$$

$m_1+m_2 = j_1+j_2-1$

その後1つずつ下げていくと…

下げられるlimitは $m_1+m_2 = j_{max} - 2j_2$
$$= j_1 - j_2 = j_{min} \ (3)$$

計算してみる

$$\sum_{j_{min}}^{j_{max}}(2j+1) = \left(\sum_1^{j_{max}} - \sum_1^{j_{min}-1}\right)(2j+1)$$
$$= (j_1+j_2)^2 + 2(j_1+j_2) - (j_1-j_2-1)^2 - 2(j_1-j_2-1)$$
$$= 4j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 + 1$$
$$= (2j_1+1)(2j_2+1)$$

確かに正しい。
but j_{max} j_{min} は半奇整数もありえる
(sigmaは定義できないはず)
j_{max}が半奇整数のとき、j_{min}もまたそう。
(このとき、j_1, j_2はどちらかが半奇、もう一つは整数)

$j_1 = \frac{k}{2}$ (kは奇数)，$j_2 = n$ (整数)　$j_1 > j_2$ とする

$$j_{max} = \frac{k}{2}+n, \qquad j_{min} = \frac{k}{2}-n$$

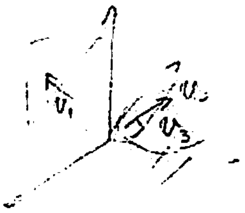
$$\sum_{j_{min}}^{j_{max}}(2j+1) = \left(2\times\left(\frac{k}{2}-n\right)+1\right) + \left(2\times\left(\frac{k}{2}-n+1\right)+1\right)$$
$$+ \left(2\times\left(\frac{k}{2}-n+2\right)+1\right) + \cdots$$

$(2n+1)$項

$$= \sum_1^{2n+1}\{(k-2n) + (2i-1)\}$$
$$= (k-2n)(2n+1) + (2n+1)(2n+2) - (2n+1)$$
$$= (k+1)(2n+1)$$
$$= (2\times j_1+1)(2\times j_2+1)$$

//

$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ を知ってて それらと直交する $|\psi_3\rangle$ をつくる. $\langle\psi_2|\psi_3\rangle = \langle\psi_1|\psi_3\rangle = 0$



$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ のつくる平面に垂直

$$P = |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|$$

$$P^2 = P \quad : \text{projection}$$

$P\vec{v}$: v_1, v_2 平面上

$$\vec{v} - P\vec{v} \perp \vec{v}_1, \vec{v}_2$$

$$|v\rangle - |v_1\rangle\langle v_1|v\rangle - |v_2\rangle\langle v_2|v\rangle = |r\rangle$$

$$\langle v_1|r\rangle = \langle v_1|v\rangle - \overbrace{\langle v_1|v_1\rangle}^{1}\langle v_1|v\rangle - \underbrace{\langle v_1|v_2\rangle}_{0}\langle v_2|v\rangle$$

$$= 0$$

$$\langle v_2|r\rangle = \overset{\text{同様に}}{0} \qquad (\text{直交!})$$

一般に $P = \sum_{i=1}^{k} |v_i\rangle\langle v_i|$

(ここまで)