NO.

DATE

量子力学3第14回授業まとめ 201310860 佐藤耀至

⑩ 合成角運動量の値

2つの独立な角運動量 $\vec{J}_1 = \begin{pmatrix} J_1^\alpha \\ J_1^\beta \\ J_1^\gamma \end{pmatrix}$, $\vec{J}_2 = \begin{pmatrix} J_2^\alpha \\ J_2^\beta \\ J_2^\gamma \end{pmatrix}$ は

$$[J_i^\alpha, J_j^\beta] = \delta_{ij} i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J_i^\gamma \quad ; i, j = 1, 2$$

をみたす。$\vec{J} \equiv \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ とすると、

$$[J^\alpha, J^\beta] = [J_1^\alpha + J_2^\alpha, J_1^\beta + J_2^\beta] = [J_1^\alpha, J_1^\beta] + [J_2^\alpha, J_2^\beta]$$

$$= i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (J_1^\gamma + J_2^\gamma) = i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J^\gamma$$

となり $\vec{J}$ も角運動量となる。(合成角運動量)

まず、個々の角運動量の状態を

$$\begin{cases} \vec{J}_1^2 |j_1, m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1, m_1\rangle \\ J_1^z |j_1, m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle \\ \vec{J}_2^2 |j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_2, m_2\rangle \\ J_2^z |j_2, m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2, m_2\rangle \end{cases}$$

後述で証明

とると、$|j, m\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ の基底の個数は $(2j_1+1)(2j_2+1)$ となる

ex) $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, $\vec{J}_1 = \vec{L}$, $\vec{J}_2 = \vec{S}$ $\Rightarrow$ $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

軌道角運動量
orbital angular momentum

$$(\vec{L} + \vec{S})^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S}$$

スピン軌道相互作用
spin-orbit interaction

NO.

DATE

ここで、一般論より

$$\begin{cases} \vec{J}^2 |j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j,m\rangle \\ J_z |j,m\rangle = \hbar m |j,m\rangle \end{cases}$$

をみたす $|j,m\rangle$ を以下のように線型結合 linear combination で表す。

$$\underset{\sim\sim}{|j,m\rangle} = |j_1,m_1\rangle \otimes |j_2,m_2\rangle = |j_1,m_1,j_2,m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1,m_2} |j,m\rangle \underbrace{\langle j,m|j_1,m_1,j_2,m_2\rangle}_{\text{CG係数}}$$

$$= \sum_{m_1,m_2} |j,m\rangle C^{j,m}_{m_1,m_2}$$

これを用いて

$$\begin{cases} j_1 \otimes j_2 = j_{max} \oplus j_{max}-1 \oplus \cdots \oplus j_{min}+1 \oplus j_{min} \\ j_{max} = j_1+j_2, \ j_{min} = j_1-j_2 \quad ; j_1 \geq j_2 \end{cases}$$

を示す。

$|j,m\rangle = |j_1,m_1,j_2,m_2\rangle$ において $m_1+m_2 = j_1+j_2$ の状態からスタートし、$j_{max} = j_1+j_2$ とする。この状態から $J^- = J_1^- + J_2^-$ を作用させる。

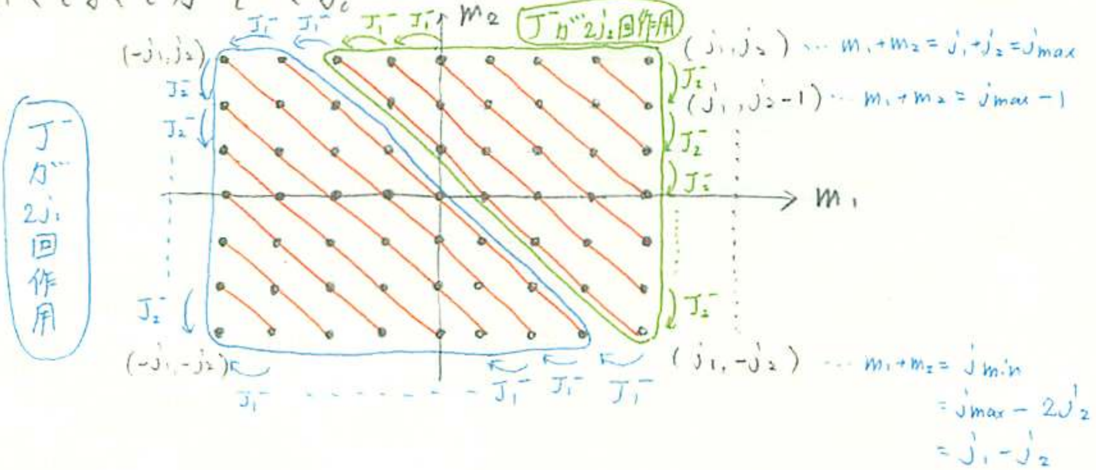
$$J^-|j,j\rangle = \sum_{m_1,m_2} (J_1^- + J_2^-)|j,j\rangle C^{j,m}_{m_1,m_2}$$

$$= \sum_{m_1,m_2} (J_1^- + J_2^-)|j_1,j_1,j_2,j_2\rangle C^{j,m}_{m_1,m_2}$$

$$= \sum_{m_1,m_2} \left(|j_1,\underbrace{j_1-1}_{m_1},j_2,\underbrace{j_2}_{m_2}\rangle + |j_1,\underbrace{j_1}_{m_1},j_2,\underbrace{j_2-1}_{m_2}\rangle \right) C^{j,m}_{m_1,m_2}$$

$$\Rightarrow 「m_1+m_2 = \underbrace{j_1+j_2}_{j_{max}}」 \xrightarrow{J^-\text{を作用}} 「m_1+m_2 = \underbrace{j_1+j_2}_{j_{max}}-1」$$

次に下に示す図からわかるように、$m_1+m_2=j_{max}$ から、J^- は $2(j_1+j_2)$ 回作用させることができる。



これより
$$\begin{cases} j_1 \otimes j_2 = j_{max} \oplus j_{max}-1 \oplus \cdots \oplus j_{min}+1 \oplus j_{min} \\ j_{max}=j_1+j_2 \ ,\ j_{min}=j_1-j_2 \ ;\ j_1 \ge j_2 \end{cases}$$

次に、$j_1 \otimes j_2$ の基底の個数を調べる。（j に対する m の個数）

$$j_1 \otimes j_2 = \underset{2j_{max}+1\text{個}}{\underset{\uparrow}{j_{max}}} \oplus \underset{2(j_{max}-1)+1\text{個}}{\underset{\uparrow}{j_{max}-1}} \oplus \cdots \oplus \underset{2j_{min}+1\text{個}}{\underset{\uparrow}{j_{min}}}$$

$$\sum_{j_{min}}^{j_{max}}(2j+1) = 2\sum_{j_{min}}^{j_{max}} j + \sum_{j_{min}}^{j_{max}}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(j_{max}-j_{min}+1)(j_{min}+j_{max}) + (j_{max}-j_{min}+1)$$

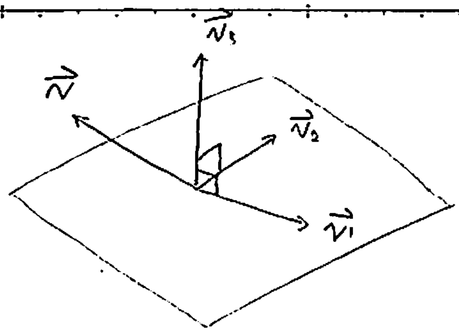
$$= (j_{max}-j_{min}+1)\{(j_{min}+j_{max})+1\}$$

$$= \{(j_1+j_2)-(j_1-j_2)+1\}\{(j_1-j_2)+(j_1+j_2)+1\}$$

$$= (2j_2+1)(2j_1+1)$$

NO.

DATE



今 $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ が与えられていて,

$$\langle\psi_1|\psi_3\rangle = \langle\psi_2|\psi_3\rangle = 0$$

をみたす $|\psi_3\rangle$ を考える。上図のようになる。

$P = |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|$ とおくと.

$$P^2 = (|v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|)(|v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|)$$

$$= |v_1\rangle\underbrace{\langle v_1|v_1\rangle}_{1}\langle v_1| + |v_1\rangle\underbrace{\langle v_1|v_2\rangle}_{0}\langle v_2|$$

$$+ |v_2\rangle\underbrace{\langle v_2|v_1\rangle}_{0}\langle v_1| + |v_2\rangle\underbrace{\langle v_2|v_2\rangle}_{1}\langle v_2|$$

$$= |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2| = P$$

$\Rightarrow$ 一般に $P = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i| \Rightarrow P^2 = P$

また $\vec{v} - P\vec{v} = |v\rangle - |v_1\rangle\langle v_1|v\rangle - |v_2\rangle\langle v_2|v\rangle = |*\rangle$ とすると

$$\langle v_1|*\rangle = \langle v_1|v\rangle - \underbrace{\langle v_1|v_1\rangle}_{1}\langle v_1|v\rangle - \underbrace{\langle v_1|v_2\rangle}_{0}\langle v_2|v\rangle$$

$$= 0$$

$$\langle v_2|*\rangle = \langle v_2|v\rangle - \underbrace{\langle v_2|v_1\rangle}_{0}\langle v_1|v\rangle - \underbrace{\langle v_2|v_2\rangle}_{1}\langle v_2|v\rangle$$

$$= 0$$