— 量子力学 3 :試験問題 — 2013. 8.2 (10:10—11:30) 初貝 (5 分延長)

(必要な記号等は授業で用いた慣用にしたがって適宜解釈せよ。)

I. 対称性に関する以下の文章の $\boxed{\text{1–10}}$ を埋めよ。

量子力学における物理量 (観測量)A は $\boxed{1}$ 演算子で表され、その $\boxed{2}$ は実数である。また、$\boxed{2}$ が異なる 2 つの状態は $\boxed{3}$ する。更に可換な 2 つの $\boxed{1}$ 演算子は同時に $\boxed{4}$ である。

波動関数 $|\psi\rangle$ に対する対称操作は $\boxed{5}$ 演算子 U ($U^\dagger U = UU^\dagger = 1$) で表され、この対称操作で波動関数が $|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$、物理量 A が $A \to A'$ と変換するならば、$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi'|A'|\psi'\rangle$ だから $A' = \boxed{6}$ である。なお $\boxed{5}$ 演算子を $U = e^{i\lambda G/\hbar}$ (λ:実) と書いたとき G は $\boxed{1}$ 演算子となる。特に λ が無限小の時、物理量がこの対称操作で不変なら、$A' = A$ であるが、λ の一次までとれば、これは $\boxed{7} = 0$ と $\boxed{8}$ と A とが可換となる。

特に、時間に依存しないハミルトニアン H に対するシュレディンガー方程式 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$ の解を $|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle$ と書いた時、$A = H$ として対称操作に対する不変性 $H = H'$ から導かれる関係式 $\boxed{7}=0$ を H に適用して、$\dfrac{d}{dt}\langle\Psi(t)|G|\Psi(t)\rangle = \boxed{9}$ となる。これは、物理量 G が $\boxed{10}$ であることを意味する。

II. 角運動量 $\boldsymbol{J}$ ($[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$) に関する以下の問いに答えよ。

II.1 軌道角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が角運動量の交換関係を満たすことを示せ。なお $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$ は座標と運動量である。

II.2 $[\boldsymbol{J}^2, J_1]$ を計算せよ。

II.3 2 つの角運動量 $\boldsymbol{J}^i$ ($i = 1, 2$) について $\boldsymbol{J}^1 \cdot \boldsymbol{J}^2 = \dfrac{1}{2}(J^1_+ J^2_- + J^1_- J^2_+) + J^1_z J^2_z$ を示せ。ただし $J^i_\pm = J^i_x \pm iJ^i_y$ である。

III. 時間反転対称操作 $\Theta = i\sigma_y\mathcal{K}$ について考える。($\mathcal{K}$ は複素共役)

III.1 軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ に関して $\Theta\boldsymbol{L}\Theta^{-1} = -\boldsymbol{L}$ を示せ。

III.2 $S=1/2$ のスピン $\boldsymbol{S}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ に関して $\Theta\boldsymbol{S}\Theta^{-1}=-\boldsymbol{S}$ を示せ。

III.3 ハミルトニアン H が時間反転対称 ($[\Theta,H]=0$) である時、H のエネルギー E の固有状態 $|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}$ に対して $|\psi^\Theta\rangle=\Theta|\psi\rangle$ も同じエネルギーの固有状態となる。しかしクラマース縮退の存在のためにはこれだけでは不十分であるのはなぜか？その理由を述べよ。

III.4 $\langle\psi|\psi^\Theta\rangle$ を計算し、これからクラマース縮退を示せ。

IV. 2 つの角運動量 $\boldsymbol{J}_i,\ \boldsymbol{J}_i^2=\hbar^2 j_i(j_i+1)$ の合成角運動量 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2,\ \boldsymbol{J}^2=\hbar^2 j(j+1)$ を考えよう。ただし、合成スピンの固有状態を $|jm\rangle$, 各スピンごとの固有状態のテンソル積を $|j_1,m_1,j_2,m_2\rangle=|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle$ と書く。以下 $j_1=1,j_2=1/2$ の場合を考える。

IV.1 $|t_1\rangle\equiv|1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ に対して $J_+|t_1\rangle,\ J_z|t_1\rangle$ を計算し $|t_1\rangle=|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$ を示せ。

IV.2 $|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\hbar\sqrt{3}}J_-|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle=(|1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle,|1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle)\psi_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}$ としたとき、2 次元ベクトル $\psi_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}$ を求めよ。

IV.3 $|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{2\hbar}J_-|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle=(|1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle,|1,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle)\psi_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$ としたとき、2 次元ベクトル $\psi_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$ を求めよ。

IV.4 $|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle=\frac{1}{\hbar\sqrt{3}}J_-|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ から $|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle$ を求め、$|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle=|1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ であることを示せ。

IV.5 $\psi^\dagger_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=0$ となるように $\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ を定めよ。ただし $a^2+b^2=1,b>0$

IV.6 $|t_2\rangle\equiv(|1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle,|1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ に関して $J_+|t_2\rangle,\ J_z|t_2\rangle$ を計算し、$|t_2\rangle=|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ を示せ。

IV.7 $|t_3\rangle=\frac{1}{\hbar}J_-|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=(|1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle,|1,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ としたとき、2 次元ベクトル $\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ を求めよ。

IV.8 $J_-|t_3\rangle,\ J_z|t_3\rangle$ を計算し $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=|t_3\rangle$ を示せ。

- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'}\delta_{kk'} - \delta_{jk'}\delta_{kj'}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk'} = 2\delta_{kk'}$
- $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$
- 座標 $\boldsymbol{r}$ 運動量 $\boldsymbol{p}$ に対して、$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ である。
- $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$.
- 角運動量の上昇下降演算子

$$
\begin{aligned}
J_+|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle, \\
J_-|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle,
\end{aligned}
$$

特に $j = \frac{1}{2}$ の場合

$$
J_+|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = 0, J_+|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad J_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad J_-|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = 0
$$

特に $j = 1$ の場合

$$
J_+|1, m\rangle = \hbar\sqrt{(1-m)(2+m)}|1, m+1\rangle, \quad J_-|1, m\rangle = \hbar\sqrt{(1+m)(2-m)}|1, m-1\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&J_+|1, 1\rangle = 0, \qquad J_+|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 1\rangle, \quad J_+|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle \\
&J_-|1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle,\ J_-|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, -1\rangle,\ J_-|1, -1\rangle = 0
\end{aligned}
$$

特に $j = \frac{3}{2}$ の場合

$$
J_+|\frac{3}{2}, m\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}-m)(\frac{5}{2}+m)}|\frac{3}{2}, m+1\rangle, \quad J_-|\frac{3}{2}, m\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}+m)(\frac{5}{2}-m)}|\frac{3}{2}, m-1\rangle
$$

$$
J_+|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = 0,\ J_+|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle,\ J_+|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \hbar 2|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,\ J_+|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,
$$

$$
J_-|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \hbar 2|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle,\ J_-|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\rangle = 0
$$

- パウリ行列

$$
\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \ (i \neq j),
$$

$$
\sigma_i^2 = E_2
$$