量子力学まとめレポート　6/30分.　A

201310899　渡辺展正

既約テンソル演算子　irreducible tensor operator

$\vec{V} = \vec{r}, \vec{p}, \vec{L}$: vector operator

$[J_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$

(既約 irreducible ⟷ 可約 reducible)

定義　$T_q^{(k)}$　$q = \underbrace{-k, -k+1, \cdots, k-1, k}_{2k+1\text{コ}}$

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\, T_{q\pm1}^{(k)}$$

一般に，$\vec{V}$: vector operator を用いて.

$$\begin{cases} T_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} V_+ \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) \\ T_0^{(1)} = V_z \\ T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y) \end{cases}$$

1階の既約テンソル演算子.
(3成分 ⟷ Vector)

☆ product of tensor operators　テンソル演算子の積.

$$T_q^{(k)} \equiv T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle$$

← CG係数.

sum over q_1, q_2

この $T_q^{(k)}$ が既約テンソル演算子となることを確認する。

使う公式は角運動量昇降の関係.

$$|j\ m\pm1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}} J_\pm |jm\rangle$$

$$[\vec{J}, T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}] = [\vec{J}, T_{q_1}^{(k_1)}] T_{q_2}^{(k_2)} + T_{q_1}^{(k_1)} [\vec{J}, T_{q_2}^{(k_2)}]$$

J_z, $J_\pm$ (J_x, J_y) との交換関係を調べる。

$$\begin{aligned} [J_z, T_q^{(k)}] &= [J_z, T_{q_1}^{(k_1)}] T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle + T_{q_1}^{(k_1)} [J_z, T_{q_2}^{(k_2)}] \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle \\ &= \hbar(q_1 + q_2) T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle \\ &= \hbar(q_1 + q_2) T_q^{(k)} \end{aligned}$$

$q = q_1 + q_2$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = [J_\pm, T_{q_1}^{(k_1)}]T_{q_2}^{(k_2)}\langle k_1 q_1, k_2 q_2|kq\rangle + T_{q_1}^{(k_1)}[J_\pm, T_{q_2}^{(k_2)}]\langle k_1 q_1, k_2 q_2|kq\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(k_1\mp q_1)(k_1\pm q_1+1)}\,T_{q_1\pm1}^{(k_1)}T_{q_2}^{(k_2)}\langle k_1 q_1, k_2 q_2|kq\rangle + \hbar\sqrt{(k_2\mp q_2)(k_2\pm q_2+1)}\,T_{q_1}^{(k_1)}T_{q_2\pm1}^{(k_2)}\langle k_1 q_1, k_2 q_2|kq\rangle$$

($\hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,|k\, q\pm1\rangle = J_\pm|kq\rangle$ であり，ここで $q\pm1 = q'$ の変形を使う)

$$\fallingdotseq \hbar\sqrt{[k_1\mp(q_1'\mp1)][k_1\pm(q_1'\mp1)+1]}\,T_{q_1'}^{(k_1)}T_{q_2}^{(k_2)}\langle k_1\, q_1'\mp1, k_2 q_2|kq\rangle + (1\leftrightarrow2\ q_2 = q_2'\mp$$

$$= \hbar\sqrt{(k_1\mp q_1'+1)(k_1\pm q_1')}\,T_{q_1'}^{(k_1)}T_{q_2}^{(k_2)}\langle k_1\, q_1'\mp1, k_2 q_2|kq\rangle + (1\leftrightarrow2)$$

(公式の正負を逆転し，エルミート共役をとると，$\hbar\sqrt{(k\mp q+1)(k\pm q)}\,\langle k\, q\pm1| = \langle kq|J_\pm$ となるので)

$$\fallingdotseq (\langle k_1 q_1'|J_{1\pm}\otimes\langle k_2 q_2|)|kq\rangle T_{q_1'}^{(k_1)}T_{q_2}^{(k_2)} + (1\leftrightarrow2)$$

$$= \langle k_1 q_1', k_2 q_2|J_{1\pm}|kq\rangle T_{q_1'}^{(k_1)}T_{q_2}^{(k_2)} + (1\leftrightarrow2)$$

まとめると，

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = T_{q_1}^{(k_1)}T_{q_2}^{(k_2)}\langle k_1 q_1, k_2 q_2|(J_{1\pm}+J_{2\pm})|kq\rangle$$

$$= T_{q_1}^{(k_1)}T_{q_2}^{(k_2)}\hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,\langle k_1 q_1, k_2 q_2|k\, q\pm1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,T_{q\pm1}^{(k)}$$

$\vec{U}, \vec{V}$: vector op.　　U_i, V_j　$i, j = x, y, z$

$U\otimes V$ ：一般に既約ではない

$U\to T_{1 0 -1}^{(1)}$, $V\to T_{1 0 -1}^{(1)}$ とすると，

$T_{q_1}^{(1)}T_{q_2}^{(1)}\langle 1, q_1, 1, q_2|kq\rangle = T_q^{(k)}$ ：既約 vector op.

$k = 2.1.0$ （3通り）　　$1\otimes1 = 2\oplus1\oplus0$

$$\begin{cases} k=2 & \text{2階 既約テンソル} \\ k=1 & \text{ベクトル} \\ k=0 & \text{スカラー} \end{cases}$$