量子力学3

6/30（火）まとめ　　A　　201310883　星 適樹

○ 既約テンソル演算子の積

・既約テンソル演算子

既約：これ以上簡単なものに分けられない

既約テンソル演算子は以下の関係を満たす。

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar k T_q^{(k)} \quad \text{—①}$$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\, T_{q\pm1}^{(k)} \quad \text{—②}$$

一般に、$k=1$ の既約テンソル演算子 $T_q^{(1)}$ は、ベクトル演算子 $\boldsymbol{V}$ を用いて以下のように表せる。

$$\left(\begin{array}{l} T_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}V_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) \\ T_0^{(1)} = V_z \\ T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y) \end{array}\right.$$

・テンソル演算子の積

$$T_q^{(k)} \equiv T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q\rangle \quad \text{—③}$$ とおく。

$T_q^{(k)}$ も既約テンソル演算子となることを示す。
すなわち $T_q^{(k)}$ が ①、② を満たすことを示す。

∵

①：$[J_z, T_q^{(k)}]$

$$= [J_1^z + J_2^z,\ T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q\rangle]$$

$$= \left\{ [J_1^z, T_{q_1}^{(k_1)}] T_{q_2}^{(k_2)} + T_{q_1}^{(k_1)} [J_2^z, T_{q_2}^{(k_2)}] \right\} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q\rangle$$

$$= \left\{ \hbar q_1 T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} + \hbar q_2 T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \right\} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q\rangle$$

$$= \hbar(q_1 + q_2) T_q^{(k)}$$

∴ $T_q^{(k)}$ は ①を満たし、$q = q_1 + q_2$ 。

②：$[J_\pm, T_q^{(k)}]$

$$= [J_1^\pm + J_2^\pm,\ T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q\rangle]$$

$$= \left\{ [J_1^\pm, T_{q_1}^{(k_1)}] T_{q_2}^{(k_2)} + T_{q_1}^{(k_1)} [J_2^\pm, T_{q_2}^{(k_2)}] \right\} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q\rangle$$

$$= \left\{ \hbar\sqrt{(k_1 \mp q_1)(k_1 \pm q_1 + 1)}\, T_{q_1\pm1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} + \hbar\sqrt{(k_2 \mp q_2)(k_2 \pm q_2 + 1)}\, T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2\pm1}^{(k_2)} \right\} \langle k_1 q_1, k_1 q_1$$

⋮

$\hbar\sqrt{(k_1\mp q_1)(k_1\pm q_1+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1\pm1}\, T^{(k_2)}_{q_2}\, \langle k_1 q_1 , k_1 q_2 | k q\rangle$ ―＊　について

$q_1' \equiv q_1 \pm 1$　とおく

$$* = \underline{\hbar\sqrt{(k_1\pm q_1')(k_1\mp q_1'+1)}}\left(\langle k_1\, q_1'\mp1| \otimes \langle k_2 q_2|\right)|kq\rangle\; T^{(k_1)}_{q_1'}\, T^{(k_2)}_{q_2}$$

$$\left(\begin{array}{l} J_\mp|kq\rangle = \hbar\sqrt{(k\pm q)(k\mp q+1)}\;|k\; q\mp1\rangle \\ \langle qk|\underbrace{J_\mp^{\dagger}}_{=J_\pm} = \hbar\sqrt{(k\pm q)(k\mp q+1)}\;\langle k\; q\mp1| \\ \qquad\qquad \therefore\ \hbar\sqrt{(k\pm q)(k\mp q+1)}\;\langle k\; q\mp1| = \langle qk|J_\pm \quad \text{―④} \end{array}\right)$$

④より

$$* = \left\{\left(\langle k_1 q_1'|J_1^\pm\right)\otimes\langle k_2 q_2|\right\}|kq\rangle\;\; T^{(k_1)}_{q_1'}\, T^{(k_2)}_{q_2}$$

$$= \langle k_1 q_1 , k_2 q_2 | J_1^\pm | kq\rangle\; T^{(k_1)}_{q_1}\, T^{(k_2)}_{q_2}$$

（∵ q_1' について和をとっているので $q_1' \to q_1$ としてよい）

よって

$$[J_\pm , T_q^{(k)}]$$

$$= T^{(k_1)}_{q_1}\, T^{(k_2)}_{q_2}\, \langle k_1 q_1 , k_2 q_2 | (J_1^\pm + J_2^\pm) | kq\rangle$$

$$= T^{(k_1)}_{q_1}\, T^{(k_2)}_{q_2}\, \langle k_1 q_1 , k_2 q_2 | J_\pm | kq\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\;\; T^{(k_1)}_{q_1}\, T^{(k_2)}_{q_2}\, \langle k_1 q_1 , k_2 q_2 | k\; q\pm1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\;\; T_q^{(k)}$$

∴ $T_q^{(k)}$ は②を満たす。

①.②を満たすので、<u>$T_q^{(k)}$ は既約テンソル演算子である。</u>

$k=1$ の1階既約テンソルは、ベクトル演算子で表される。

$U, V \to T^{(1)}_{1,0,-1}$

この2つの既約テンソルの積からは $k=2,1,0$ の3つの既約テンソルができる。

$1\otimes1 = 2\oplus1\oplus0$

$k=2$：2階既約テンソル
$k=1$：ベクトル
$k=0$：スカラー

次回：ウィグナー・エッカートの定理について