20110851
NO. 九島槙之介
DATE 6 30

A

★ irreducible tensor operator (既約テンソル演算子)　　irreducible (既約) ↔ reducible (可約 = 簡単なものに分けられる)

$\vec{V} = \vec{r}, \vec{p}, \vec{L}$: vector operator　$[J_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$
に対して

$T_q^{(k)}$　　($q = -k, \cdots, k$ の $2k+1$ コ)　既約テンソル

(A)　$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$

(B)　$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\ T_{q\pm1}^{(k)}$　　の2式成立

一般に $\vec{V}$: vector operator に対して、既約テンソルの例として

$$
\left.
\begin{aligned}
T_1^{(1)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} V_+ \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) \\
T_0^{(1)} &= V_z \\
T_{-1}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)
\end{aligned}
\right\}
$$

1階の既約テンソル operator
3成分 = ベクトル

★ product of tensor operators (テンソル演算子の積)

$$T_q^{(k)} = T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle$$　← CG係数

としたときに、積が既約テンソルになるか調べてみる。

└ (A), (B) が成立しているかどうか。

(A) $[J_z, T_q^{(k)}]$

$$= \underbrace{[J_z, T_{q_1}^{(k_1)}]}_{\hbar q_1 T_{q_1}^{(k_1)}} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle + T_{q_1}^{(k_1)} \underbrace{[J_z, T_{q_2}^{(k_2)}]}_{\hbar q_2 T_{q_2}^{(k_2)}} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle$$

$$= \hbar(q_1 + q_2) T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | k q \rangle$$

$$= \hbar(q_1 + q_2) T_q^{(k)}$$　で成立。■

NO.

DATE

(B) $[J_\pm , T_q^{(k)}]$

$$= [J_\pm , T_{q_1}^{(k_1)}]\, T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | kq\rangle + T_{q_1}^{(k_1)} [J_\pm , T_{q_2}^{(k_2)}] \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | kq\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(k_1 \mp q_1)(k_1 \pm q_1 + 1)}\; T_{q_1\pm 1}^{(k_1)}\, T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | kq\rangle$$

$$+ \hbar\sqrt{(k_2 \mp q_2)(k_2 \pm q_2 + 1)}\; T_{q_1}^{(k_1)}\, T_{q_2\pm 1}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | kq\rangle$$

($q_1' = q_1 \pm 1$ で $q_1 = q_1' \mp 1$, $q_2' = q_2 \pm 1$ で $q_2 = q_2' \mp 1$)

$$= \hbar\sqrt{\underbrace{\{k_1 \mp (q_1' \mp 1)\}\{k_1 \pm (q_1' \mp 1) + 1\}}_{(k_1 \mp q_1' \pm 1)(k_1 \pm q_1')}}\; T_{q_1'}^{(k_1)}\, T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1\, q_1' \mp 1, k_2 q_2 | kq\rangle$$

$$+ \hbar\sqrt{\underbrace{\{k_2 \mp (q_2' \mp 1)\}\{k_2 \pm (q_2' \mp 1) + 1\}}_{(k_2 \mp q_2' \pm 1)(k_2 \pm q_2')}}\; T_{q_1}^{(k_1)}\, T_{q_2'}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2\, q_2' \mp 1 | kq\rangle$$

(Formula で

$$|j, m \pm 1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}}\, J_\pm |j m\rangle$$ を変形したら、

$\hbar\sqrt{(k_1 \mp q_1' + 1)(k_1 \pm q_1')}\, \langle k_1 q_1' \mp 1| = \langle k q_1' | J_\pm$ になるので、)

$$= \Big\{ \big(\langle k_1 q_1 | J_{1\pm} \otimes \langle k_2 q_2 |\big) |kq\rangle + \big(\langle k_1 q_1 | \otimes \langle k_2 q_2 | J_{2\pm}\big) |kq\rangle \Big\} T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}$$

$$= \big(\langle k_1 q_1, k_2 q_2 | J_{1\pm} | kq\rangle + \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | J_{2\pm} | kq\rangle \big) T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}$$

$$= T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | \underbrace{(J_{1\pm} + J_{2\pm})}_{J_\pm} | kq\rangle$$

$$= T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}\, \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\, \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | kq \pm 1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\; T_{q\pm 1}^{(k)}$$ で成立。□

∴ $T_q^{(k)} = T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}$ は既約テンソルとして交換則交換子ok!

NO.

DATE

・次回の演習で…

$\vec{U}, \vec{V}$: vector op.

$U_i\ V_j \quad (i, j = x, y, z)$ に対して

$U \otimes V$ は一般に既約ではない。

↓

既約なものをつくるには?

$$T^{(1)}_{q_1} T^{(1)}_{q_2} \langle 1 q_1, 1 q_2 | k q \rangle = T^{(k)}_q$$

$1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$

($k=2$: 2階の既約テンソル
1 : ベクトル
0 : スカラー

・次回の講義で…

ウィグナー・エッカートの定理

Weigner - Eckart's theorem

物理量 θ に対して

$\langle \psi | \theta | \psi \rangle = \bigcirc \times \bigcirc$

↑ θ で決まる部分 ↑ 構造で決まる部分

にわかれている