量子力学3 まとめレポート 6/12分

A 201310899 渡辺 展正

Addition of angular momentum.

(復習) $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$ $\vec{S_1}, \vec{S_2}$: $s = 1/2$ spin

$$\vec{S}_{1,2}^2 |S_{1,2} M_{1,2}\rangle = \hbar^2 S_{1,2}(S_{1,2}+1)|S_{1,2}, M_{1,2}\rangle$$

↳ このとき $S_{1,2} = 1/2$ (数) となる.

$$S_{1,2}^z |S_{1,2} M_{1,2}\rangle = \hbar M_{1,2} |S_{1,2} M_{1,2}\rangle$$

$$[S_i^\alpha, S_j^\beta] = \delta_{ij}\, i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$$

つまり $\vec{S_1}, \vec{S_2}$: Angular momentum $\longrightarrow$ $\vec{S}$: Angular momentum.

$$\vec{S}^2 |SM\rangle = \hbar S(S+1)|SM\rangle$$
$$S_z |SM\rangle = \hbar M |SM\rangle$$

である. S, M とはどのようなものか?

実際に 状態をつくってみる

$$|SM\rangle = \sum_{M_1, M_2} |S_1 M_1\rangle \otimes |S_2 M_2\rangle C_{M_1, M_2}$$ と展開 (expansion)

$|S_1 M_1\rangle, |S_2 M_2\rangle$ は知ることのできる量であるから $|S_1 M_1, S_2 M_2\rangle$ を知ることができる。

また量子力学での記法に従えば, $C_{M_1, M_2} = \langle S_1 M_1, S_2 M_2 | SM\rangle$ と表わせる。

$$\rightarrow |SM\rangle = |S_1 M_1, S_2 M_2\rangle\langle S_1 M_1, S_2 M_2 | SM\rangle$$

$$|S_1 M_1, S_2 M_2\rangle\langle S_1 M_1, S_2 M_2| = 1$$ 完全性 completeness

今までの議論は,

operator $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$ sum, 和

state $|S_1 M_1\rangle \otimes |S_2 M_2\rangle$ product 積.

$\rightarrow$ $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2} = \vec{S_1} \otimes 1 + 1 \otimes \vec{S_2}$ と表わせる。

c.f. Another example

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) = H_x + H_y + H_z \qquad H_\alpha = \frac{P_\alpha^2}{2m}$$

$$H_x = \underset{x}{H_x} \otimes \underset{y}{1} \otimes \underset{z}{1}$$ でもある。

固有状態をつくる

$$\psi(x, y, z) = \phi_{k_x}(x)\, \phi_{k_y}(y)\, \phi_{k_z}(z)$$ 変数分離

$$H\psi = (H_x + H_y + H_z)\, \phi_{k_x}(x)\, \phi_{k_y}(y)\, \phi_{k_z}(z)$$

$$= \underbrace{(H_x \phi_{k_x}(x))}_{\varepsilon_x \phi_{k_x}(x)} \phi_{k_y}(y) \phi_{k_z}(z) + \phi_{k_x}(x) \underbrace{(H_y \phi_{k_y}(y))}_{\varepsilon_y \phi_{k_y}(y)} \phi_{k_z}(z) + \phi_{k_x}(x) \phi_{k_y}(y) \underbrace{(H_z \phi_{k_z}(z))}_{\varepsilon_z \phi_{k_z}(z)}$$

$$\frac{P_x^2}{2m}\phi(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\phi(x) \longrightarrow \phi_k(x) = e^{ik_x x}$$

$$\left(P_x = \frac{\hbar}{i}\partial_x\right) \qquad \varepsilon_k \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\psi = e^{ik_x x} + e^{ik_y y} + e^{ik_z z} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

一般に (generically)

$$\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$$

$$\vec{J}^2 |j_{1,2}\ m_{1,2}\rangle = \hbar^2 j_{1,2}(j_{1,2}+1) |j_{1,2}\ m_{1,2}\rangle$$

$$J^z_{1,2} |j_{1,2}\ m_{1,2}\rangle = \hbar^2 m_{1,2} |j_{1,2}\ m_{1,2}\rangle$$

$$[J_i^\alpha, J_j^\beta] = \delta_{ij}\, i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J^\gamma \longrightarrow [J^\alpha, J^\beta] = i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J^\gamma$$

$$\longrightarrow \quad \vec{J}^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle$$

$$J^z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$$

となる j, m とはどのようなものか?

(先ほどの S, M より一般的)

前回の授業の議論では、$j_1 = 1/2$, $j_2 = 1/2$

$m_1 = \pm 1/2$, ↑, ↓ 　　$2 \times 2 = 4$

$m_2 = \pm 1/2$, ↑, ↓

$j = 1, 0$

$j = 1$, $m = -1, 0, 1 \longrightarrow 3$: triplet

$j = 0$, $m = 0 \longrightarrow 1$: singlet

④

対応 $\Rightarrow \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$

であった。

☆ $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ 　　 $j_1 = 1,\ j_2 = 1.$

$1 \otimes 1 = \sim$ を調べる。以前と同様、角運動量の公式のみで議論できる。

formula

$$\begin{cases} J_+ |jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\ |j\ m+1\rangle \\ J_- |jm\rangle = \hbar\sqrt{(j-m+1)(j+m)}\ |j\ m-1\rangle \end{cases}$$

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \equiv |m_1, m_2\rangle$$

$$\rightarrow \underset{1,0,-1}{|m_1\rangle}\ \underset{1,0,-1}{|m_2\rangle} \qquad \underline{3 \times 3 = 9コ.}$$

$$|j\ m\rangle = \underbrace{\sum_{m_1, m_2}}_{(*)} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j m\rangle}_{\text{C.G. coef}}$$

C.G. coef : Clebsh - Gordon coefficient

$$J^z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$$
$$= (J_1^z + J_2^z) |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$$
$$= \hbar(m_1 + m_2) |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$$

から $m = m_1 + m_2$ が成立。

$(*)$ では $m_1 + m_2 = m$ かつ (他の係数) $= 0$ という条件がかかる。

従って $\langle jm | j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = 0$ $(m \neq m_1 + m_2)$ が要求される。

ここで、
$$\begin{cases} |1,1\rangle = |j_1 = 1, m_1 = 1, j_2 = 1, m_2 = 1\rangle = |1,1,1,1\rangle \\ J^+ |1,1\rangle = (J_1^+ + J_2^+) |1,1\rangle = \underbrace{J_1^+ |1\rangle}_{=0} |1\rangle + |1\rangle \underbrace{J_2^+ |1\rangle}_{=0} = 0 \end{cases}$$

が成立つために、

$$|j=2, m=2\rangle = |1\rangle|1\rangle = |11, 11\rangle$$ となる。

$$J^- |2,2\rangle = \hbar\sqrt{1 \cdot 4}\ |2\ 1\rangle = 2\hbar |2,1\rangle$$

$$\rightarrow |2,1\rangle = \frac{1}{2\hbar} J^- |2\ 2\rangle = \frac{1}{2\hbar}(J_1^+ + J_2^+) |11\rangle |11\rangle$$
$$= \frac{1}{2\hbar}\left\{\hbar\sqrt{2 \cdot 1}\, |10\rangle |11\rangle + \hbar\sqrt{1 \cdot 2}\, |11\rangle |10\rangle\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle |11\rangle + |11\rangle |10\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10,11\rangle + |11,10\rangle)$$

従って $|j\,m\rangle = |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j\, m\rangle$

$j=2,\ m=1$ $\quad \langle 1.0, 1.1 \,|\, 2.1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle 1.1, 1.0 \,|\, 2.1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である.

同様に,

$$J^-|2.1\rangle = \hbar\sqrt{2\cdot 3}\,|2.0\rangle$$

$$\to\ |2.0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{6}} J^-|2.1\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{6}}(J_1^- + J_2^-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1.0,1.1\rangle + |1.1,1.0\rangle)$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{12}}\Big(\underbrace{J_1^-|1.0,1.1\rangle}_{\hbar\sqrt{2}|1.-1,1.1\rangle} + \underbrace{J_2^-|1.0,1.1\rangle}_{\hbar\sqrt{2}|1.0,1.0\rangle} + \underbrace{J_1^-|1.1,1.0\rangle}_{\hbar\sqrt{2}|1.0,1.0\rangle} + \underbrace{J_2^-|1.1,1.0\rangle}_{\hbar\sqrt{2}|1.1,1.-1\rangle}\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\big(|1.-1,1.1\rangle + 2|1.0,1.0\rangle + |1.1,1.-1\rangle\big)$$

規格化条件から.

$\langle 1,-1, 1.1 \,|\, 2.0\rangle = 1/\sqrt{6}$ $\quad,\quad$ $\langle 1,1,1,-1 \,|\, 2.0\rangle = 1/\sqrt{6}.$

$\langle 1.0, 1.0 \,|\, 2.0\rangle = 2/\sqrt{6}$

(以下 自分で導出)

$$J^-|2,0\rangle = \hbar\sqrt{3\cdot 2}\,|2,-1\rangle$$

$$\to\ |2,-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{6}} J^-|2.0\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{6}}(J_1^- + J_2^-)\frac{1}{\sqrt{6}}\big(|1,-1,1.1\rangle + 2|1.0,1.0\rangle + |1.1,1.-1\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{6\hbar}\Big(\underbrace{J_1^-|1.-1\rangle}_{=0}|1.1\rangle + 2\underbrace{J_1^-|1.0\rangle}_{=\hbar\sqrt{2}|1.-1\rangle}|1.0\rangle + \underbrace{J_1^-|1.1\rangle}_{=\hbar\sqrt{2}|1.0\rangle}|1-1\rangle$$

$$+ |1-1\rangle\underbrace{J_2^-|1\,1\rangle}_{=\hbar\sqrt{2}|1.0\rangle} + 2|1.0\rangle\underbrace{J_2^-|1\,0\rangle}_{=\hbar\sqrt{2}|1.-1\rangle} + |1.1\rangle\underbrace{J_2^-|1-1\rangle}_{=0}\Big)$$

$$= \frac{1}{6\hbar}\big(2\sqrt{2}\hbar|1.-1\rangle|1\,0\rangle + \hbar\sqrt{2}|1.0\rangle|1-1\rangle + \hbar\sqrt{2}|1-1\rangle|1.0\rangle + 2\sqrt{2}\hbar|1.0\rangle|1-1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1.-1,1.0\rangle + |1.0,1.-1\rangle\big)$$

$$J^- |2,-1\rangle = \hbar\sqrt{4\cdot 1}\, |2,-2\rangle$$

$$\rightarrow |2,-2\rangle = \frac{1}{2\hbar} J^- |2,-1\rangle$$

$$= \frac{1}{2\hbar}(J_1^- + J_2^-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0,1,-1\rangle + |1,-1,1,0\rangle)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\hbar}\Big(\underbrace{J_1^-|10\rangle}_{=\hbar\sqrt{2}|1-1\rangle}|1-1\rangle + \underbrace{J_1^-|1-1\rangle}_{=0}|1,0\rangle + |1,0\rangle\underbrace{J_2^-|1-1\rangle}_{=0} + |1-1\rangle\underbrace{J_2^-|1,0\rangle}_{=\hbar\sqrt{2}|1,-1\rangle}\Big)$$

$$= |1,-1\rangle|1-1\rangle = |1-1,1-1\rangle$$

従って $J^-|2\ -2\rangle = (J_1^- + J_2^-)|1-1,1-1\rangle = 0$.

(以上 自分で導出)

$m = 1+1 = 2 \longrightarrow j = 2.$

$m = 1+0 = 0+1 = 1$) $|11\rangle|10\rangle$, $|10\rangle|11\rangle$

$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|10\rangle + |10\rangle|11\rangle)$ に対して、spinの議論と同様直交する状態を考える。

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|10\rangle - |10\rangle|11\rangle) = |1,1\rangle$$

ただし $e^{i\theta}$ の任意性が出てきて、位相が定まらない。→ 位相:1として考えていく。

$|11\rangle$ が求める状態であることを確かめる。($j = m = 1$)

$$J^+|11\rangle = (J_1^+ + J_2^+)\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|10\rangle - |10\rangle|11\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\underbrace{J_1^+|10\rangle}_{\hbar\sqrt{2}|11\rangle}|11\rangle + |11\rangle\underbrace{J_2^+|10\rangle}_{\hbar\sqrt{2}|11\rangle}\Big) = 0$$

$$J^-|11\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|10\rangle$$

$$\rightarrow |10\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}J^-|11\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(J_1^- + J_2^-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|10\rangle - |10\rangle|11\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|1-1\rangle - |1-1\rangle|11\rangle) \quad (\because J^-|10\rangle = \hbar\sqrt{2}|1-1\rangle)$$

$$J^-|10\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1-1\rangle$$

$$\rightarrow |1-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(J_1^- + J_2^-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|1-1\rangle - |1-1\rangle|11\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle|1-1\rangle - |1-1\rangle|10\rangle)$$

これは確かに

$$J^-|1,-1\rangle = (J_1^- + J_2^-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle|1,-1\rangle - |1-1\rangle|1,0\rangle) = 0.$$

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c}|2\ 2\rangle\\ \vdots\\ |2,-2\rangle\end{array}\right\}5 \quad \vdots \quad \left.\begin{array}{c}|1\,1\rangle\\ |1\,0\rangle\\ |1\,{-1}\rangle\end{array}\right\}3}_{\begin{array}{c}j=2 \qquad\qquad j=1\\ 8\end{array}}$$

$m=2$, $m=1$ } 今回までで確認できた　　3×3 9

$m=0$

→ $|1\,1\rangle|1\,{-1}\rangle$, $|1\,0\rangle|1\,0\rangle$, $|1\,{-1}\rangle|1\,1\rangle$

$j=0$ について，$(m=0)$

$$|2.0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|1.{-1}\rangle|1\,1\rangle + 2|1\,0\rangle|1\,0\rangle + |1\,1\rangle|1.{-1}\rangle\right)$$

$$|1.0\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\left(|1.1\rangle|1{-1}\rangle - |1{-1}\rangle|1.1\rangle\right)$$

$\longrightarrow |0.0\rangle$ であるはず（状態は上2つと直交するように生成）

$$|0.0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1{-1}\rangle|1\,1\rangle - |1\,0\rangle|1\,0\rangle + |1\,1\rangle|1{-1}\rangle\right)$$

（位相を1としている）

結局

$1\otimes 1 = 2\oplus 1\oplus 0$

$(3\times 3 = 9 = 5+3+1)$ である。