20110851
NO. 九島 槙之介
DATE 6.12.

A

角運動量の合成
今までやっていたこと … addition of angular momentum

$S = \vec{S_1} + \vec{S_2}$, $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$ ・ $s = \frac{1}{2}$ のスピン

$[S_i^\alpha, S_j^\beta] = \delta_{ij} i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\nu} S_i^\nu$ より

$\vec{S_1}, \vec{S_2}$: Angular momentum → $\vec{S}$ も Angular momentum

こういえたので、 $\left.\begin{array}{l}\vec{S_1}^2 |S, M\rangle = \hbar S(S+1)|S, M\rangle \\ S_1^z |S, M\rangle = \hbar M |S, M\rangle\end{array}\right\}$

とかけた。 このときの $|S, M\rangle$ は何なの？ ってこと。

展開
$|S, M\rangle$ を expansion すると

$$|S, M\rangle = \sum_{M_1 M_2} \underbrace{|S_1 M_1\rangle \otimes |S_2 M_2\rangle}_{|S_1 M_1, S_2 M_2\rangle} C_{M_1 M_2}$$

係数　Clebsh-Gordon 係数

この係数 $C_{M_1 M_2} = \langle S_1 M_1, S_2 M_2 | S M\rangle$ とかいてみると

完全性
$|S, M\rangle = |S_1 M_1, S_2 M_2\rangle\langle S_1 M_1, S_2 M_2| = 1$: completeness

で便利だねっていう話。

NO.

DATE . .

これから operator $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$ 和 sum

$= \vec{S_1} \otimes 1 + 1 \otimes \vec{S_2}$

state $|S_1 M_1\rangle \otimes |S_2 M_2\rangle$ 積 product だねぇ

(another example)

operator

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) = H_x + H_y + H_z$$

state $\psi(x, y, z) = \phi_{kx}(x)\,\phi_{ky}(y)\,\phi_{kz}(z)$

$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$H\psi = (H_x + H_y + H_z)\,\phi_{kx}(x)\,\phi_{ky}(y)\,\phi_{kz}(z)$$

$$= \underbrace{(H_x\phi_{kx}(x))}_{\varepsilon_k \phi_{kx}(x)}\phi_{ky}(y)\,\phi_{kz}(z) + \phi_{kx}(x)\underbrace{(H_y\phi_{ky}(y))}_{\varepsilon_k \phi_{ky}(y)}\phi_{kz}(z)$$

$$+ \phi_{kx}(x)\,\phi_{ky}(y)\underbrace{(H_z\phi_{kz}(z))}_{\varepsilon_k \phi_{kz}(z)}$$

(また $\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x\right)^2\phi(x) = \frac{P_x^2}{2m}\phi(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\phi(x)$ $\because \phi_{kx} = e^{ik_x x}$)

$$= (\varepsilon_{kx} + \varepsilon_{ky} + \varepsilon_{kz})\,\phi_{kx}(x)\,\phi_{ky}(y)\,\phi_{kz}(z)$$

$\therefore \psi = e^{ik_x x}\,e^{ik_y y}\,e^{ik_z z} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

で state が product の形になっている!

NO.

DATE

一般に $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ で

$$\begin{cases} \vec{J}_{1,2}^{\,2} | j_{1,2} m_{1,2} \rangle = \hbar^2 j_{1,2}(j_{1,2}+1) | j_{1,2} m_{1,2} \rangle \\ J_{1,2}^{z} | j_{1,2} m_{1,2} \rangle = \hbar m_{1,2} | j_{1,2} m_{1,2} \rangle \end{cases}$$

$$[J_i^\alpha, J_j^\beta] = \delta_{ij}\, i\hbar\, \varepsilon^{\alpha\beta\nu} J_i^\nu$$

$$= [J^\alpha J^\beta] = i\hbar\, \varepsilon^{\alpha\beta\nu} J^\nu$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{J}^{\,2} |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle \\ J^z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle \end{array}\right\}$$ で $m = -j, -j+1, \cdots, j$

→ j は何？

前回 $j_1 = 1/2$, $j_2 = 1/2$ で $j = 1, 0$

$$\left.\begin{array}{llll} j = 1 \to m = -1, 0, 1 & \to ③ & \text{三重項 triplet} \\ j = 0 \to m = 0 & \to ① & \text{一重項 singlet} \end{array}\right\} ④$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = \pm\frac{1}{2} = \uparrow\downarrow \quad ② \\ m_2 = \pm\frac{1}{2} = \uparrow\downarrow \quad ② \end{array}\right\} ④$$

一致

これを $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ とかいた。

NO.

DATE

☆ $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ 　 $j_1 = 1,\ j_2 = 1$ の場合を考える。

$\boxed{1 \otimes 1 = \text{何なのか？}}$

Formula 　 $J_+ |j\, m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\ |j\ m+1\rangle$

$J_- |j\, m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m+1)(j+m)}\ |j\ m-1\rangle$

$|j_1\, m_1\rangle |j_2\, m_2\rangle = |j_1\, m_1,\ j_2\, m_2\rangle$

で $|m_1\rangle\ |m_2\rangle$
$(1, 0, -1)$ 　 $(1, 0, -1)$ 　 $\rightarrow$ 　 $3 \times 3 = 9$

がわかってて j はどうなのって話。

$|j, m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \underline{\langle j_1 m_1,\ j_2 m_2 | j\, m\rangle}$ 　 CG係数

- - - - - - - - -

。 $m_1 + m_2 = m$ のとき

$J^2 |j\, m\rangle = \hbar m\, |j\, m\rangle$

$\Leftrightarrow (J_1^2 + J_2^2)\, |j_1\, m_1,\ j_2\, m_2\rangle = \hbar(m_1 + m_2)\, |j_1\, m_1,\ j_2\, m_2\rangle$

。 $m_1 + m_2 \neq m$ のとき

$\langle j\, m | j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = 0$ 　 CG係数は 0

NO.

DATE

まずは、

$|1,1\rangle = |j_1=1\ m_1=1,\ j_2=1\ m_2=1\rangle = |11,11\rangle$

$J^+|1,1\rangle = (J_1^+ + J_2^+)|11\rangle$

$= \overset{0}{\overset{\shortparallel}{J_1^+|1\rangle}}|1\rangle + |1\rangle \overset{0}{\overset{\shortparallel}{J_2^+|1\rangle}} = 0$ より上にはいけない

$|j=2,\ m=2\rangle = |1\rangle|1\rangle = |11,11\rangle$

$\therefore\ |2,2\rangle = |11,11\rangle$ とわかる。

ここで formula で

$J_-|2,2\rangle = \hbar\sqrt{1\cdot 4}\,|2,1\rangle = 2\hbar|2,1\rangle$

$\therefore\ |2,1\rangle = \frac{1}{2\hbar}J_-|2,2\rangle$

$= \frac{1}{2\hbar}(J_1^- + J_2^-)|11\rangle|11\rangle$

$= \frac{1}{2\hbar}\left\{\hbar\sqrt{1\cdot 2}\,|10\rangle|11\rangle + \hbar\sqrt{2}\,|11\rangle|10\rangle\right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle|11\rangle + |11\rangle|10\rangle)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10,11\rangle + |11,10\rangle)$

つまり、$|jm\rangle = |j_1m_1, j_2m_2\rangle\langle j_1m_1, j_2m_2|jm\rangle$

$j=2,\ m=1$ で

$$\left.\begin{aligned}\langle 10,11|21\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \langle 11,10|21\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}$$ とわかった。

NO.

DATE . .

次に
$$J^- |2,1\rangle = \hbar\sqrt{2\cdot 3}\ |2,0\rangle$$

$$\therefore |2\,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{6}} J^- |2,1\rangle$$
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{6}} (J_1^- + J_2^-) \frac{1}{\sqrt{2}} (|10,11\rangle + |11,10\rangle)$$
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} (\underbrace{J_1^- |10,11\rangle}_{\hbar\sqrt{2\cdot 1}\,|1\text{-}1,11\rangle} + \underbrace{J_2^- |10,11\rangle}_{\hbar\sqrt{1\cdot 2}\,|10,10\rangle} + \underbrace{J_1^- |11,10\rangle}_{\hbar\sqrt{2}\,|10,10\rangle} + \underbrace{J_2^- |11,10\rangle}_{\hbar\sqrt{2}\,|11,1\text{-}1\rangle})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (|1\text{-}1,11\rangle + 2|10,10\rangle + |11,1\text{-}1\rangle)$$

つまり
$$\left.\begin{aligned} \langle 1\text{-}1,11|2\,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \langle 10,10|2\,0\rangle &= \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \langle 11,1\text{-}1|2\,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}\right\}$$ とわかった。

同様にすれば $|2,-1\rangle = *J_-|2,0\rangle$
$|2,-2\rangle = *J_-|2,-1\rangle$ と、

$J^-|2,-2\rangle = 0$ ができるよね。

ここまでで $m = 1+1 = 2 \to j = 2$ のときを考えた。

次に $m = 1+0 = 0+1 = 1$ のときを考えたい。

$$|11\rangle|10\rangle, \ |10\rangle|11\rangle$$

NO.

DATE . .

さっき $|21\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|10\rangle + |10\rangle|11\rangle)$ だったから、

$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|10\rangle - |10\rangle|11\rangle)$ だと推測。

$J^+|11\rangle = (J_1^+ + J_2^+)\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle|10\rangle - |10\rangle|11\rangle)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-J_1^+|10\rangle|11\rangle + |11\rangle J_2^+|10\rangle) = 0$ より $j = m = 1$ だ。

これを用いれば、

$J^-|11\rangle = \hbar\sqrt{1\cdot 2}\,|10\rangle$

$\therefore |10\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}J^-|11\rangle$

$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}J^-(|11\rangle|10\rangle - |10\rangle|11\rangle)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|1,-1\rangle|11\rangle + |11\rangle|1-1\rangle)$

$\therefore |1\,-1\rangle = *J^-|10\rangle$ 、 とできるね。