量子力学3 まとめレポート　7/3分

201310899　渡辺 展正

Wigner - Eckert Theorem　ウィグナー・エーカットの定理

量子力学ではエネルギーなどの物理量も遷移確率で表わされる。

$$\langle \varphi | \underset{\text{物の個性}}{*} | \psi \rangle = A\,\underset{\text{構造（対称性）で表わされる。}}{B}$$

$\langle jm | T_q^{(k)} | jm' \rangle = ?$　について議論する。

公式

$$|j\,m\pm1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}} J_\pm |jm\rangle$$

既約テンソル演算子に限って行列要素を考えるので、

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q\, T_q^{(k)}$$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\, T_{q\pm1}^{(k)}$$

$$|jm\rangle' \equiv \sum_{q_1 m_2} \underbrace{T_{q_1}^{(k)} |j_2 m_2\rangle}_{\equiv |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle} \langle k q_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$= \sum_{q_1 m_2} |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \langle k_1 q_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$\left\{\begin{aligned}
\vec{J}\,|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle &= \vec{J}\,T_{q_1}^{(k)}|j_2 m_2\rangle = [\vec{J}, T_{q_1}^{(k)}]\,|j_2 m_2\rangle + T_{q_1}^{(k)}\vec{J}\,|j_2 m_2\rangle \\
J_z\,|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle &= \hbar q_1 T_{q_1}^{(k)}|j_2 m_2\rangle + T_{q_2}^{(k)}(\hbar m_2)|j_2 m_2\rangle \\
&= \hbar(q_1+m_2)\,T_{q_1}^{(k)}|j_2 m_2\rangle \\
&= \hbar(q_1+m_2)\,|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \\
J_\pm\,|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle &= \hbar\sqrt{(k_1\mp q_1)(k_1\pm q_1+1)}\;T_{q_1\pm1}^{(k)}|j_2 m_2\rangle + \hbar\sqrt{(j_2\mp m_2)(j_2\pm m_2+1)}\;T_{q_1}^{(k)}|j_2\,m_2\pm1\rangle \\
&= \hbar\sqrt{(k_1\mp q_1)(k_1\pm q_1+1)}\;|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1\pm1\,m_2}\rangle + \hbar\sqrt{(j_2\mp m_2)(j_2\pm m_2+1)}\;|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1\,m_2\pm1}\rangle
\end{aligned}\right.$$

$$J_z|jm\rangle' = \sum_{q_1 m_2} \hbar(q_1+m_2)\,|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2 | jm\rangle \qquad q_1+m_2 = m$$

$$= \hbar m \sum_{q_1 m_2} |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$= \hbar m\,|jm\rangle'$$

$$J_\pm|jm\rangle' = \sum_{g_1 m_2}\Big[\hbar\sqrt{(k_1\mp g_1)(k_1\pm g_1+1)}\,T^{(k_1)}_{\underset{\to g_1'}{g_1\pm1}}|j_2m_2\rangle\langle k_1 \underset{\to g_1'\mp1}{g_1}, j_2m_2|jm\rangle$$

$(g_1 = g_1'\mp1\text{として})\ \sqrt{(k_1\mp(g_1'\mp1))(k_1\pm(g_1'\mp1)+1)} = \sqrt{(k_1\mp g_1'+1)(k_1\pm g_1')}$

$$+\hbar\sqrt{(j_2\mp m_2)(j_2\pm m_2+1)}\,T^{(k_1)}_{g_1}|j_2\underbrace{m_2\pm1}_{\to m_2'}\rangle\langle k_1g_1, j_2\underbrace{m_2}_{\to m_2'\mp1}|jm\rangle\Big]$$

$(m_2 = m_2'\mp1\text{として})\ \sqrt{(j_2\mp(m_2'\mp1))(j_2\pm(m_2'\mp1)+1)}$

$= \sqrt{(j_2\mp m_2'+1)(j_2\pm m_2')}$

$(g_1'\to g_1,\ m_2'\to m_2\ \text{と書き直して})$

$$= \sum_{g_1m_2}\Big[\hbar\sqrt{(k_1\mp g_1+1)(k_1\pm g_1)}\,T^{(k_1)}_{g_1}|j_2m_2\rangle\langle k_1 g_1\mp1, j_2m_2|jm\rangle$$

$$+\hbar\sqrt{(j_2\mp m_2+1)(j_2\pm m_2)}\,T^{(k_1)}_{g_1}|j_2m_2\rangle\langle k_1g_1, j_2\, m_2\mp1|jm\rangle\Big]$$

$$\left(\begin{array}{l} J_\mp|k_1g_1\rangle = \hbar\sqrt{(k_1\mp g_1+1)(k_1\pm g_1)}\,|k_1\, g_1\mp1\rangle \\ \text{エルミート共役}\longrightarrow\ \langle k_1g_1|J_{1\pm} = \hbar\sqrt{(k_1\mp g_1+1)(k_1\pm g_1)}\,\langle k_1, g_1\mp1| \end{array}\right).$$

$$= \sum_{g_1m_2}\Big[T^{(k_1)}_{g_1}|j_2m_2\rangle\langle k_1g_1j_2m_2|(J_{1\pm}+J_{2\pm})|jm\rangle\Big].$$

$$= \sum_{g_1m_2}T^{(k_1)}_{g_1}|j_2m_2\rangle\langle k_1g_1j_2m_2|J_\pm|jm\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(j\pm m+1)(j\mp m)}\sum_{g_1m_2}T^{(k_1)}_{g_1}|j_2m_2\rangle\langle k_1g_1j_2m_2|j\,m\pm1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(j\pm m+1)(j\mp m)}\,|j\,m\pm1\rangle'$$

従って、 $|jm\rangle' \propto |jm\rangle$ が導かれた。

今までとは逆の議論において、

$$|jm\rangle' = \sum|\Omega^{k_1j_2}_{g_1m_2}\rangle\langle k_1g_1j_2m_2|jm\rangle$$

$$\sum_m|jm\rangle\langle jm|k_1g_1', j_2m_2'\rangle = \sum_{g_1m_2}|\Omega^{k_1j_2}_{g_1m_2}\rangle \cdot |\Omega^{k_1j_2}_{g_1'm_2'}\rangle$$

$$\left(\because \boxed{\sum_m\langle k_1g_1, j_2m_2|jm\rangle\langle jm|k_1g_1', j_2m_2'\rangle} = \delta_{g_1g_1'}\delta_{m_2m_2'}\right).$$

$$\therefore\ |\Omega^{k_1j_2}_{g_1m_2}\rangle = \sum|jm\rangle'\langle jm|k_1g_1, j_2m_2\rangle$$

以上で準備が整ったので、本題へと移る。

$${}'\langle jm|\Omega^{k_1j_2}_{g_1m_2}\rangle = {}'\langle jm|T^{(k_1)}_{g_1}|j_2m_2\rangle$$

$$= \sum_{m'}\underbrace{\langle jm|jm'\rangle'}_{\delta_{mm'}\langle jm|jm\rangle',\ |jm'\rangle\propto|jm\rangle}\langle jm'|k_1g_1j_2m_2\rangle$$

$$= \langle jm|jm\rangle'\langle jm|k_1g_1j_2m_2\rangle$$

$\langle jm|jm\rangle'$: m に依らない.

$$\langle jm-1|jm-1\rangle' = \langle jm-1|\frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}}J_-|jm\rangle'$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}}\left(J_+|jm-1\rangle\right)^\dagger|jm\rangle'$$

$$= \left(|jm\rangle\right)^\dagger|jm\rangle' = \langle jm|jm\rangle' \quad \lrcorner$$

$$\langle jm|jm\rangle' \equiv \frac{\langle j\|T^{(k)}_{q_1}\|j\rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

還元行列要素 (m に依らない)
reduced matrix element

$$\langle jm|T^{(k)}_{q_1}|j_2m_2\rangle = \underbrace{\frac{\langle j\|T^{(k)}_{q_1}\|j_2\rangle}{\sqrt{2j+1}}}_{\text{個性を表現}}\underbrace{\langle jm|k_1q_1j_2m_2\rangle}_{\text{CG係数}}$$

∴ Wigner - Eckert の定理

$$\langle jm|O|j'm'\rangle = 0 \quad \begin{cases} j\neq j' & \text{if } O \text{ is scaler} \\ j-i=\pm1,0 & \text{if } O \text{ is vector} \end{cases}$$