量子力学ノート 7/3　20131085? 槇岡 政人

授業の記録【事実・知識】　メモ【考え・気持ち・自主学習】

☆ Wigner - Eckart theorem

product of tensor operator & state vector

$$|jm\rangle' = \sum_{q_1 m_2} T^{(k_1)}_{q_1} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \equiv T^{(k_1)}_{q_1} |j_2 m_2\rangle .$$

$$\Rightarrow |jm\rangle' = \sum_{q_1 m_2} |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm\rangle$$

↑ $\mathbb{J}$

$$\mathbb{J}|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle = \mathbb{J} T^{(k_1)}_{q_1} |j_2 m_2\rangle$$
$$= (\mathbb{J} T^{(k_1)}_{q_1} - T^{(k_1)}_{q_1} \mathbb{J}) |j_2 m_2\rangle + T^{(k_1)}_{q_1} \mathbb{J} |j_2 m_2\rangle$$
$$= [\mathbb{J}, T^{(k_1)}_{q_1}] |j_2 m_2\rangle + T^{(k_1)}_{q_1} \mathbb{J} |j_2 m_2\rangle$$

Review

$$[J_z, T^{(k)}_q] = \hbar q T^{(k)}_q$$
$$[J_\pm, T^{(k)}_q] = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\, T^{(k)}_{q\pm 1}$$
$$J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle ,$$
$$J_\pm |jm\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, |j\, m \pm 1\rangle$$

$$J_z |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle = [J_z, T^{(k_1)}_{q_1}] |j_2 m_2\rangle + T^{(k_1)}_{q_1} J_z |j_2 m_2\rangle$$
$$= \hbar q_1 T^{(k_1)}_{q_1} |j_2 m_2\rangle + T^{(k_1)}_{q_1} \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle$$
$$= \hbar (q_1 + m_2) T^{(k_1)}_{q_1} |j_2 m_2\rangle$$
$$= \hbar (q_1 + m_2) |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle$$

作成年月日:　年　月　日

$$J_\pm |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle = [J_\pm , T^{(k_1)}_{q_1}]|j_2 m_2\rangle + T^{(k_1)}_{q_1} J_\pm |j_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(k_1\mp q_1)(k_1\pm q_1+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1\pm 1}|j_2 m_2\rangle$$

$$+ \hbar\sqrt{(j_2\mp m_2)(j_2\pm m_2+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1}|j_2\; m_2\pm 1\rangle .$$

$$= \hbar\sqrt{\sim}\;|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1\pm 1\; m_2}\rangle$$

$$+ \hbar\sqrt{\sim}\;|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1\; m_2\pm 1}\rangle$$

$$J_z|jm\rangle' = \sum_{q_1 m_2} \underbrace{J_z|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle}\langle k_1 q_1 ; j_2 m_2 | j m\rangle$$

$$\| \qquad \hbar\underbrace{(q_1+m_2)}|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle, \qquad q_1+m_2 = m$$

$$= \hbar m \sum_{q_1 m_2} |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2 | j m\rangle$$

$$= \hbar m |jm\rangle'$$

$$J_\pm|jm\rangle' = \sum_{q_1 m_2}\Big[\hbar\sqrt{(k_1\mp q_1)(k_1\pm q_1+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1\pm 1}|j_2 m_2\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2|jm\rangle$$

$$+ \hbar\sqrt{(j_2\mp m_2)(j_2\pm m_2+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1}|j_2\; m_2\pm 1\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2 | jm\rangle\Big]$$

$$= \sum_{q_1 m_2}\hbar\sqrt{(k_1\mp q_1)(k_1\pm q_1+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1\pm 1}|j_2 m_2\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2|jm\rangle$$

$$+ \sum_{q_1 m_2}\hbar\sqrt{(j_2\mp m_2)(j_2\pm m_2+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1}|j_2\; m_2\pm 1\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2|jm\rangle$$

$q_1 \to q_1 \mp 1$, $\qquad (J_\mp |k_1 q_1 j_2 m_2\rangle)^\dagger$

$m_2 \to m_2 \mp 1$.

$$= \sum_{q_1 m_2}\hbar\sqrt{(k_1\pm q_1)(k_1\mp q_1+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1}|j_2 m_2\rangle\langle k_1 q_1\mp 1\; j_2 m_2|jm\rangle$$

$$+ \sum_{q_1 m_2}\hbar\sqrt{(j_2\pm m_2)(j_2\mp m_2+1)}\; T^{(k_1)}_{q_1}|j_2 m_2\rangle\langle k_1 q_1 j_2\; m_2\mp 1|jm\rangle .$$

$$= \sum_{q_1 m_2} T^{(k_1)}_{q_1}|j_2 m_2\rangle(J_{1\mp}|k_1 q_1 j_2 m_2\rangle)^\dagger|jm\rangle$$

$$+ \sum_{q_1 m_2} T^{(k_1)}_{q_1}|j_2 m_2\rangle(J_{2\mp}|k_1 q_1 j_2 m_2\rangle)^\dagger|jm\rangle$$

$(J_{2\mp}|k_1 q_1 j_2 m_2\rangle)^\dagger$

$$\left(\because\; J_\mp^\dagger = (J_x \mp i J_y)^\dagger = (J_x \pm i J_y) = J_\pm\right)$$

$$= \sum_{q_1 m_2} T^{(k_1)}_{q_1}|j_2 m_2\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2|(J_{1\pm}+J_{2\pm})|jm\rangle$$

$$= \sum_{q_1 m_2} T^{(k_1)}_{q_1}|j_2 m_2\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2|J_\pm|jm\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\sum_{q_1 m_2} T^{(k_1)}_{q_1}|j_2 m_2\rangle\langle k_1 q_1 j_2 m_2|j\; m\pm 1\rangle .$$

$$= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\;|j\; m\pm 1\rangle'$$

$\to |jm\rangle'$: eigenstate.

授業の記録【事実・知識】 メモ【考え・気持ち・自主学習】

$$\langle jm | j'm' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \langle jm | jm \rangle$$

$$\sum_{jm} |jm\rangle \langle jm | k_1 q_1', j_2 m_2' \rangle$$

$$= \sum_{jm} \sum_{q_1 m_2} T^{(k_1)}_{q_1} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm \rangle \langle jm | k_1 q_1', j_2 m_2' \rangle$$

$$= \sum_{q_1 m_2} T^{(k_1)}_{q_1} |j_2 m_2\rangle \delta_{m_2' m_2} \delta_{q_1' q_1}$$

$$= T^{(k_1)}_{q_1'} |j_2 m_2'\rangle$$

$$\left(\because \sum_{jm} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | jm \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \right)$$

$$\langle j'm' | T^{(k_1)}_{q_1} | j_2 m_2 \rangle = \sum_{jm} \langle j'm' | jm \rangle \langle jm | k_1 q_1, j_2 m_2 \rangle$$

$$= \sum_{jm} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \langle jm | jm \rangle \langle jm | k_1 q_1, j_2 m_2 \rangle$$

$$= \langle j'm' | j'm' \rangle \langle j'm' | k_1 q_1, j_2 m_2 \rangle$$

$$\therefore \langle jm | \Omega^{k_1 \, j_2}_{q_1 \, m_2} \rangle = \langle jm | jm \rangle \langle jm | k_1 q_1, j_2 m_2 \rangle$$

$$\langle j\, m-1 | j\, m-1 \rangle = \frac{1}{\hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}} \langle j\, m-1 | J_- | jm \rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}} (J_+ | j\, m-1 \rangle)^\dagger | jm \rangle$$

$$= (|jm\rangle)^\dagger |jm\rangle = \langle jm | jm \rangle$$

$\Longrightarrow$ $\langle jm | jm \rangle$: independent of m

$\Longrightarrow$ $\langle jm | jm \rangle \equiv \dfrac{\langle j \| T^{(k_1)}_{q_1} \| j \rangle}{\sqrt{2j+1}}$: reduced matrix element

$$\therefore \langle jm | T^{(k_1)}_{q_1} | j_2 m_2 \rangle = \langle jm | jm \rangle \langle jm | k_1 q_1, j_2 m_2 \rangle$$

$$= \frac{\langle j \| T^{(k_1)}_{q_1} \| j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle jm | k_1 q_1, j_2 m_2 \rangle$$

$\Downarrow$

Wigner-Eckart theorem

作成年月日: 年 月 日