NO.

DATE

量子力学3　第17回講義まとめ

201310851　金杉 翔太

Wigner-Eckartの定理

$$\langle jm | T_q^{(k)} | j'm' \rangle = ?$$

既約テンソル演算子 $T_q^{(k)}$　$(q = -k, -k+1, \cdots, k-1, k)$

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q + 1)(k \pm q)}\, T_{q\pm1}^{(k)}$$

$$|j,m\rangle' \equiv \sum_{q_1, m_2} T_{q_1}^{(k_1)} |j_2, m_2\rangle \langle k_1 q_1, j_2, m_2 | j, m\rangle$$

$$= \sum_{q_1 m_2} |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm\rangle \qquad \left(|\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \equiv T_{q_1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle \right)$$

上のように $|jm\rangle'$ を定義すると

$$\mathbb{J} |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle = \mathbb{J}\, T_{q_1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle = [\mathbb{J}, T_{q_1}^{(k_1)}] |j_2 m_2\rangle + T_{q_1}^{(k_1)} \mathbb{J} |j_2 m_2\rangle$$

であるから、

$$J_z |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle = [J_z, T_{q_1}^{(k_1)}] |j_2 m_2\rangle + T_{q_1}^{(k_1)} J_z |j_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar q_1 |j_2 m_2\rangle + \hbar m_2 T_{q_1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar (q_1 + m_2) |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle$$

$$\therefore J_z |jm\rangle' = \sum_{q_1 m_2} J_z |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$= \sum_{q_1 m_2} \hbar (q_1 + m_2) |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm\rangle$$

$$= \hbar m \sum_{q_1 m_2} |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm\rangle \qquad \left(\because\ m = q_1 + m_2 \text{ 以外では、} \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm\rangle = 0 \right)$$

$$= \hbar m |jm\rangle'$$

また、

$$J_\pm |\Omega^{k_1 j_2}_{q_1 m_2}\rangle = [J_\pm, T_{q_1}^{(k_1)}] |j_2 m_2\rangle + T_{q_1}^{(k_1)} J_\pm |j_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(k_1 \mp q_1)(k_1 \pm q + 1)}\, T_{q_1 \pm 1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle + \hbar\sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)}\, T_{q_1}^{(k_1)} |j_2, m_2 \pm 1\rangle$$

$$\therefore J_\pm |jm\rangle' = \sum_{q_1 m_2} \hbar \Big[\sqrt{(k_1 \mp q_1)(k_1 \pm q_1 + 1)}\, T_{q_1 \pm 1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 q_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$
$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)}\, T_{q_1}^{(k_1)} |j_2, m_2 \pm 1\rangle \langle k_1 q_1, j_2 m_2 | jm\rangle \Big]$$

$$= \sum_{q_1 m_2} \hbar \Big[\sqrt{(k_1 \mp q_1' + 1)(k_1 \pm q_1')}\, T_{q_1'}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 q_1' \mp 1, j_2 m_2 | jm\rangle$$
$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2' + 1)(j_2 \pm m_2')}\, T_{q_1}^{(k_1)} |j_2 m_2'\rangle \langle k_1 q_1, j_2, m_2' \mp 1 | jm\rangle \Big]$$

$(q_1' = q_1 \pm 1,\ m_2' = m_2 \pm 1$ とおいた$)$

$$= \sum_{q_1 m_2} \hbar \Big[\sqrt{(k_1 \mp q_1 + 1)(k_1 \pm q_1)}\, T_{q_1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 q_1 \mp 1, j_2 m_2 | jm\rangle$$
$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}\, T_{q_1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 q_1 j_2 m_2 \mp 1 | jm\rangle \Big]$$

$(q_1' \to q_1,\ m_2' \to m_2)$

$$= \sum_{q_1 m_2} \Big[T_{q_1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 q_1 j_2 m_2 | J_{1\pm} | jm\rangle + T_{q_1}^{(k_1)} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 q_1 j_2 m_2 | J_{2\pm} | jm\rangle \Big]$$

$$= \sum_{g_1 m_2} T^{(k_1)}_{g_1} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 g_1 j_2 m_2 | (J_{1\pm} + J_{2\pm}) | jm\rangle$$
$$= \sum_{g_1 m_2} T^{(k_1)}_{g_1} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 g_1 j_2 m_2 | J_\pm | jm\rangle$$
$$= \sum_{g_1 m_2} T^{(k_1)}_{g_1} |j_2 m_2\rangle \langle k_1 g_1 j_2 m_2 | \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\, |j, m\pm 1\rangle$$
$$= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\, |j, m\pm 1\rangle'$$
まとめると、
$$|jm\rangle' = \sum_{g_1 m_2} |\Omega^{k_1 j_2}_{g_1 m_2}\rangle \langle k_1 g_1 j_2 m_2 | jm\rangle$$
$$J_z |jm\rangle' = \hbar m |jm\rangle'$$
$$J_\pm |jm\rangle' = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\, |j, m\pm 1\rangle'$$
であり、
$$|jm\rangle' \propto |jm\rangle$$
となっていることが分かる。ここで、
$$|\Omega^{k_1 j_2}_{g_1 m_2}\rangle = \sum_m |jm\rangle' \langle jm | k_1 g_1, j_2 m_2\rangle$$
であるから、
$$\langle jm | \Omega^{k_1 j_2}_{g_1 m_2}\rangle = \langle jm | T^{(k_1)}_{g_1} | j_2 m_2\rangle$$
$$= \sum_{m'} \langle jm | jm'\rangle' \langle jm' | k_1 g_1 j_2 m_2\rangle$$
$$= \langle jm | jm\rangle' \langle jm | k_1 g_1 j_2 m_2\rangle \qquad \text{—— } (*)$$
となる。最後の変形では $|jm\rangle' \propto |jm\rangle$ より、$\langle jm | jm'\rangle' \propto \delta_{mm'}$ を用いて $m = m'$ と置けることを用いた。また、
$$\langle j, m-1 | j, m-1\rangle' = \langle j, m-1 | \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} J_- |j, m\rangle'$$
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} (J_+ |j, m-1\rangle)^\dagger |j, m\rangle'$$
$$= \langle j, m | j, m\rangle'$$
となり、$\langle jm | jm\rangle'$ は m に依らないことが分かるので、
$$\langle jm | jm\rangle' \equiv \frac{\langle j \| T^{(k_1)}_{g_1} \| j\rangle}{\sqrt{2j+1}}$$
として還元行列要素を定義すると、(*) より、
$$\boxed{\langle j, m | T^{(k_1)}_{g_1} | j_2, m_2\rangle = \frac{\langle j \| T^{(k_1)}_{g_1} \| j\rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle j, m | k_1, g_1, j_2, m_2\rangle}$$
となる。これを Wigner-Eckert の定理と呼ぶ。

Wigner-Eckert の定理を用いると、ある物理量 $\mathcal{O}$ に対して、$\mathcal{O}$ と $T_{q_1}^{(k_1)}$ を対応させると、$\mathcal{O}$ が $k_1=0$ のスカラーの場合には、

$$\langle j,m|\mathcal{O}|j',m'\rangle = 0 \quad (j \neq j')$$

となり、$\mathcal{O}$ が $k_1=1$ のベクトルの場合には、

$$\langle j,m|\mathcal{O}|j',m'\rangle = 0 \quad (j-j' = 0, \pm 1)$$

となることが分かる。