量子力学3 第9回講義まとめ

201310851 金杉 翔太

☆スピン

電磁場中の電子(電荷 $e<0$、質量 m)のハミルトニアンは、

$$H=\frac{1}{2m}(\mathbb{p}-e\mathbb{A})^2+e\phi \quad \text{——} \ ①$$

と書ける。但し、$\mathbb{A}$ はベクトルポテンシャル、ϕ はスカラーポテンシャルであり、磁束密度 $\mathbb{B}$、電場 $\mathbb{E}$ に対して、

$$\mathbb{B}=\mathrm{rot}\,\mathbb{A}$$
$$\mathbb{E}=-\nabla\phi-\dot{\mathbb{A}}$$

を満たす。古典論では正準方程式から、

$$\frac{\partial H}{\partial r_i}=-\dot{p}_i \ , \quad \frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{r}_i \quad \text{——} \ ②$$

が成り立つので、これを①に適用すると、

$$m\ddot{\mathbb{r}}=e(\mathbb{E}+\mathbb{v}\times\mathbb{B})$$

が導ける。

次に、$\phi=0$ とし、$\mathbb{B}=(0,0,B)$ の一様磁場中の電子を考える。

ベクトルポテンシャル $\mathbb{A}$ として、対称ゲージを選択し、

$$\mathbb{A}=\frac{1}{2}\mathbb{B}\times\mathbb{r} \quad \text{——} \ ③$$

とする。③式より、

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A})_i &= \varepsilon_{iab}\partial_a A_b \\ &=\frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\partial_a\varepsilon_{bjk}B_j r_k \\ &=\frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{bja}B_j \\ &=\frac{1}{2}\times 2\delta_{ij}B_j = B_i\end{aligned}$$

となるので、③は $\mathrm{rot}\,\mathbb{A}=\mathbb{B}$ を満たしている。ここで、$\phi=0$ であるから、

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2m}(\mathbb{p}-e\mathbb{A})^2 \\ &=\frac{1}{2m}\mathbb{p}^2-\frac{e}{2m}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{A}+\mathbb{A}\cdot\mathbb{p})+\frac{1}{2m}(e\mathbb{A})^2 \\ &\simeq\frac{\mathbb{p}^2}{2m}+H_p \qquad \left(H_p=-\frac{e}{2m}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{A}+\mathbb{A}\cdot\mathbb{p})\ \text{とした}\right)\end{aligned}$$

但し、最後の変形では、$\frac{1}{2m}(e\mathbb{A})^2 \ll H_p$ となることを用いた。

ここで、fを任意の関数として、

$$(\mathbb{p}\cdot\mathbb{A})f = -i\hbar\nabla\cdot(\mathbb{A}f) = -i\hbar(\nabla\cdot\mathbb{A})f - i\hbar\mathbb{A}\cdot\nabla f$$

$$(\mathbb{A}\cdot\mathbb{p})f = -i\hbar\mathbb{A}\cdot\nabla f$$

であり、対称ゲージにおいては、

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbb{A} &= \partial_i A_i \\ &= \partial_i \frac{1}{2}(\varepsilon_{iab} B_a r_b) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{iai} B_a = 0\end{aligned}$$

であるから、③のように$\mathbb{A}$をとると、$\mathbb{B}=(0,0,B)$の時、

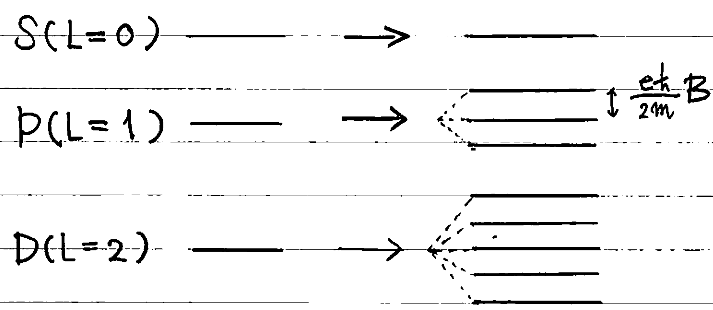
$$\begin{aligned}H_p &= -\frac{e}{2m}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{A}+\mathbb{A}\cdot\mathbb{p}) \\ &= -\frac{e}{2m}\cdot 2\mathbb{A}\cdot\mathbb{p} \\ &= -\frac{e}{m}\frac{1}{2}(\mathbb{B}\times\mathbb{r})\cdot\mathbb{p} \\ &= -\frac{e}{2m}(\mathbb{r}\times\mathbb{p})\cdot\mathbb{B} \\ &= -\frac{e}{2m}\mathbb{L}\cdot\mathbb{B} = -\frac{e}{2m}BL_z \quad \text{— ④}\end{aligned}$$

となる。角運動量の固有状態$|L,M\rangle$を考えると、

$$\mathbb{L}^2|L,M\rangle = \hbar^2 L(L+1)|L,M\rangle$$

$$L_z|L,M\rangle = \hbar M|L,M\rangle$$

であるから、④は、$(2L+1)$重に縮退していたエネルギー準位が、一様磁場をかけたことによって、等間隔$\frac{e}{2m}B\hbar$の$(2L+1)$個のエネルギー準位に分裂することを示している。これをゼーマン効果という。



ここで、実験との整合性を考えて、$\mathbb{L}\to\mathbb{L}+g\mathbb{S}$と置き換えを行う。$\mathbb{S}=(S_x\ S_y\ S_z)$はスピンと呼ばれ、$g$は$g$因子と呼ばれる。$g\sim 2$であることが知られており、$[L_i, S_j]=0$である。このように考えることをスピン仮説と呼ぶ。

NO.

DATE . .

スピン仮説は、特殊相対論と量子力学を融合することによって考えられるディラック方程式からの帰結である。
角運動量$\mathbb{L}$と同様に、スピン$\mathbb{S}$についても

$$\mathbb{S}^2 \leftrightarrow \hbar s(s+1)$$

の対応がある。但し、$s=1/2$である。このスピン仮説を考えることで、ゼーマン効果やスピン軌道相互作用などが考えられる。
スピン仮説より、

$$H_p = -\frac{e}{2m}\mathbb{B}\cdot(\mathbb{L}+g\mathbb{S})$$
$$= -\frac{e}{2m}\mathbb{B}\cdot\mathbb{L} - \frac{e}{2m}g\mathbb{S}\cdot\mathbb{B} = -\frac{e}{2m}\mathbb{B}\cdot\mathbb{L} - \mu\cdot\mathbb{B}$$

但し、

$$\mu = \frac{e}{2m}g\mathbb{S} = g\mu_B\mathbb{S}/\hbar$$

であり、$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$はボーア磁子と呼ばれる。