第6回．講義まとめ．　　201310853 川石 大地

角運動量 $\vec{L}$ の，第 i 成分は，次で与えられる。

$$L_i = \varepsilon_{ijk} r_j p_k$$

$$\therefore \begin{cases} L_x = y p_z - z p_y \\ L_y = z p_x - x p_z \\ L_z = x p_y - y p_x \end{cases}$$

$[L_x, L_y]$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
&[L_x, L_y] \\
&= [y p_z - z p_y,\ z p_x - x p_z] \\
&= [y p_z,\ z p_x - x p_z] - [z p_y,\ z p_x - x p_z] \\
&= [y p_z,\ z p_x] - [y p_z,\ x p_z] \\
&\quad - [z p_y,\ z p_x] + [z p_y,\ x p_z]
\end{aligned}$$

ここで，p_z と z 以外の順序は自由に交換できることより，

$$\begin{aligned}
[y p_z,\ z p_x] &= y p_z z p_x - z p_x y p_z \\
&= y(p_z z - z p_z) p_x = -i\hbar y p_x
\end{aligned}$$

$[y p_z, x p_z] = 0$，　$[z p_y, z p_x] = 0$．

$[z p_y, x p_z] = i\hbar x p_y$

となるので、

$$\begin{aligned}
&[L_x, L_y] \\
&= i\hbar(x p_y - y p_x) = i\hbar L_z
\end{aligned}$$

同様に計算すれば、以下が成り立つ。

$$\begin{cases} [L_x, L_y] = i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] = i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] = i\hbar L_y \end{cases}$$

～角運動量演算子の交換関係～

これを別のやり方で説明しよう。まず、

$L_i = \varepsilon_{iab} r_a p_b$,

$L_j = \varepsilon_{jcd} r_c p_d$

と書く。この時、

$$\begin{aligned}
&[L_i, L_j] \\
&= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}[r_a p_b,\ r_c p_d] \\
&= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\left[r_a[p_b, r_c]p_d + r_c[r_a, p_d]p_b\right] \\
&= i\hbar(\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jca} r_c p_b - \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jbd} r_a p_d)
\end{aligned}$$

ここで、公式「$\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{i\gamma\delta} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$」を用いて計算すると、

$$[L_i, L_j] = i\hbar(\delta_{ic}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{jc}) r_c p_b = i\hbar(r_i p_j - r_j p_i)$$

となり，上の3つの関係を満たしていることが分かる。

また，

$$\varepsilon_{ijk} L_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kab} r_a p_b = (\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}) r_a p_b$$

となることから、

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k$$

と書けることが分かる。

次に，$[J_i, J_j] \equiv i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$ と定義されたベクトル

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$$ について考えていく。

この時 $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ について，

$[\vec{J}^2, J_x] = 0$，$[\vec{J}^2, J_y] = 0$．$[\vec{J}^2, J_z] = 0$

が成り立つ。つまり，$\vec{J}^2$ は $\vec{J}$ の各成分について可換である。

～Proof.～

$$\begin{aligned}
&[\vec{J}^2, J_z] \\
&= [J_x^2 + J_y^2,\ J_z] \\
&= J_x[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_x \\
&\quad + J_y[J_y, J_z] + [J_y, J_z]J_y \\
&= -i\hbar J_x J_y - i\hbar J_y J_x \\
&\quad + i\hbar J_y J_x + i\hbar J_x J_y = 0.
\end{aligned}$$

他の成分も同様に証明可。

～Q.E.D～

さて、$[\vec{J}^2, J_z]=0$ ならば、その規格化直交された同時固有状態が存在し、これを $|j,m\rangle$ とすると、以下のように書ける。

$$\vec{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle$$

$$J_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle$$

ただし、$m, j \in \mathbb{R}$

ここで、$m, j \in \mathbb{R}$ について、

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2 \cdots$$

（非負の整数かつ半奇整数）

$$m = -j, -j+1, -j+2, \cdots, j-1, j$$

（総計 $2j+1$ コ）

のみが許されることに注意する。

ここで、ladder operator

$$J_\pm \equiv J_x \pm iJ_y$$

を定義する。これの共役をとると、

$$J_\pm^\dagger = J_x^\dagger \mp iJ_y^\dagger = J_x \mp iJ_y = J_\mp$$

となる。これは、

・$[\vec{J}^2, J_\pm]$

$$= [\vec{J}^2, J_x] \pm i[\vec{J}^2, J_y] = 0$$

・$[J_z, J_\pm]$

$$= [J_z, J_x \pm iJ_y]$$

$$= [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y]$$

$$= i\hbar J_y \pm i(-i\hbar)J_x$$

$$= i\hbar J_y \pm \hbar J_x = \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) = \pm\hbar J_\pm$$

・$[J_+, J_-]$

$$= [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y]$$

$$= -i[J_x, J_y] + i[J_y, J_x]$$

$$= -i\cdot i\hbar J_z + i(-i\hbar)J_z = 2\hbar J_z$$

と、3つの関係式をみたすことが分かる。

まとめると、

$$\begin{cases} [\vec{J}^2, J_\pm] = 0 & -① \\ [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm & -② \\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z & -③ \end{cases}$$

次に、内積 $\vec{J}^A \cdot \vec{J}^B$ を考える。

定義式を J_x, J_y について解けば、

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$$

$$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

が得るが、これを用いれば内積は、

$$\vec{J}^A \cdot \vec{J}^B$$

$$= J_x^A J_x^B + J_y^A J_y^B + J_z^A J_z^B$$

$$= \frac{1}{2}(J_+^A + J_-^A)\frac{1}{2}(J_+^B + J_-^B) + \left(\frac{1}{2i}\right)^2(J_+^A - J_-^A)(J_+^B - J_-^B) + J_z^A J_z^B$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(J_+^A + J_-^A)(J_+^B + J_-^B) - (J_+^A - J_-^A)(J_+^B - J_-^B)\right\} + J_z^A J_z^B$$

$$= \frac{1}{4}(J_+^A J_-^B + J_-^A J_+^B + J_+^A J_-^B + J_-^A J_+^B) + J_z^A J_z^B$$

$$= \frac{1}{2}(J_+^A J_-^B + J_-^A J_+^B) + J_z^A J_z^B$$

よって、以下が成り立つ。

$$\vec{J}_A \cdot \vec{J}_B = \frac{1}{2}(J_+^A J_-^B + J_-^A J_+^B) + J_z^A J_z^B \quad -(*)$$

これと、上の③より得られる式

$$\hbar J_z = \frac{1}{2}(J_+ J_- - J_- J_+) \quad -(**)$$

を用いると、$(*) + (**)$ より

$$J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_z(J_z - \hbar)$$

また、$(*) - (**)$ より

$$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_z(J_z + \hbar)$$

となる。