20110851

NO. 九島槙之介

DATE 4.28.(木)

☆ Algebra of angular momentum
角運動量の代数

Rotation : unitary op. $U = e^{i\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}/\hbar}$

generator $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P}$, $\vec{P} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$: Angular momentum

としたときに $\vec{L}$ について考える。

$L_i = \varepsilon_{ijk} r_j P_k$ である。

順に入れかえる
cycle permutation

$$L_z = xP_y - yP_x$$
$$L_x = yP_z - zP_y$$
$$L_y = zP_x - xP_z$$

ここで

$$[L_x, L_y] = [yP_z - zP_y,\ zP_x - xP_z]$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$
$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$ なので

$$= [yP_z,\ zP_x - xP_z] - [zP_y,\ zP_x - xP_z]$$

$$= [yP_z, zP_x] - [yP_z, xP_z] - [zP_y, zP_x] + [zP_y, xP_z]$$

$$= y[P_z, z]P_x + [y, \cancel{zP_x}]P_z - 0 - 0 + z[\cancel{P_y, xP_z}] + [z, xP_z]P_y$$

$$= y\underbrace{[P_z, z]}_{-i\hbar}P_x + x\underbrace{[z, P_z]}_{i\hbar}P_y$$

$$= i\hbar(xP_y - yP_x)$$

$$= i\hbar L_z$$

LOOSE LEAF L1201 6mm×36lines maruman

$\therefore\ [L_x, L_y] = i\hbar L_z,\ [L_y, L_z] = i\hbar L_x,\ [L_z, L_x] = i\hbar L_y$

となる。(゛cP)

〈Another 別法 way〉

$L_i = \varepsilon_{iab} r_a p_b,\quad L_j = \varepsilon_{jcd} r_c p_d$ で、

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}[\underset{A}{r_a}\underset{B}{p_b}, \underset{C}{r_c p_d}]$$

$$= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\left\{ r_a [p_b, r_c p_d] + [r_a, r_c p_d] p_b \right\}$$

$$= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\left\{ r_a \underbrace{[p_b, r_c]}_{-i\hbar\delta_{bc}} p_d + r_c \underbrace{[r_a, p_d]}_{i\hbar\delta_{ad}} p_b \right\}$$

$$= i\hbar\,\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}(-\delta_{bc} r_a p_d + \delta_{ad} r_c p_b)$$

$$= i\hbar(\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jca} r_c p_b - \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jbd} r_a p_d)$$

(ここで $\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{i\gamma\delta} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$ なので)

$$= i\hbar(-\varepsilon_{aib}\varepsilon_{ajc} r_c p_b + \varepsilon_{bia}\varepsilon_{bjd} r_a p_d)$$

$$= i\hbar\left\{(-\delta_{ij}\delta_{bc} + \delta_{ic}\delta_{bj}) r_c p_b + (\delta_{ij}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{aj}) r_a p_d\right\}$$

$a \to c,\quad d \to b$ とすると、

$$= i\hbar\left\{(-\cancel{\delta_{ij}\delta_{bc}} + \delta_{ic}\delta_{bj}) r_c p_b + (\cancel{\delta_{ij}\delta_{cb}} - \delta_{ib}\delta_{cj}) r_c p_b\right\}$$

$$= i\hbar(\delta_{ic}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{jc}) r_c p_b$$

$$= i\hbar(r_i p_j - r_j p_i)$$

一方で $\varepsilon_{ijk} L_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kab} r_a p_b$

$$= (\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}) r_a p_b$$

$$= r_i p_j - r_j p_i$$

$\therefore [L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k$

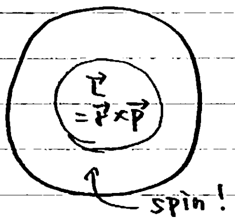
$$[\underset{1}{L_x}, \underset{2}{L_y}] = i\hbar\, \varepsilon_{12k} L_k = i\hbar L_z \;/\!/$$

今、$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \to [L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k$ を見た。

Angular momentum operator $\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$ を決めて

$[J_i, J_j] \equiv i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$ と定義する。

$[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$



実は $\vec{L}$ は一部でしかない。
残りのところがスピンにあたる。

この $\vec{J}$ について考察していく。

NO.

DATE

$\vec{J}^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ と決めれば、

$[\vec{J}^2, J_x] = [\vec{J}^2, J_y] = [\vec{J}^2, J_z] = 0$

$$\begin{aligned}
&[\vec{J}^2, J_z] \\
&= [J_x^2 + J_y^2, J_z] \\
&= J_x[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_x + J_y[J_y, J_z] + [J_y, J_z]J_y \\
&= (-i\hbar \cancel{J_x} J_y - i\hbar \cancel{J_y} J_x + i\hbar \cancel{J_y} J_x + i\hbar \cancel{J_x} J_y) \\
&= 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

今、$[\vec{J}^2, J_z] = 0$ とわかった。つまり、

$$\begin{cases} \vec{J}^2 |*\rangle = A|*\rangle \\ J_z |*\rangle = B|*\rangle \end{cases}$$ 同時固有状態

$\vec{J}^2$, $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$, J_x, J_y, J_z = hermite で、

A, B : real $\rightarrow U = e^{i\delta\vec{\omega}\cdot\vec{L}/\hbar}$ ($\delta\vec{\omega}$: 無次元 dimensionless)

$B \propto \hbar$ $\hbar$: real number

$B = \hbar m$ m : real number

$A \propto \hbar^2$

$A = \hbar^2 j(j+1)$ j : real number

NO.

DATE

これらで

$$\vec{J}^2 |j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j,m\rangle$$

$$J_z |j,m\rangle = \hbar m |j,m\rangle$$

とかけたとき、このj, mは一体なんなのか？

結果

allowed values

$j = 0, 1, 2, 3, 4 \cdots$ non-negative integers 非負の整数

$\quad 1/2, 3/2, 5/2, \cdots$ half odd integers 半奇整数

$m = -j, -j+1, -j+2, \cdots, j-1, j$

mの個数

$(\dim \# m = 2j+1)$

j	m	個数	
$j=0$	$m=0$	1	$= 2\cdot 0 + 1$
1	$-1, 0, 1$	3	$= 2\cdot 1 + 1$
2	$-2, -1, 0, 1, 2$	5	$= 2\cdot 2 + 1$
1/2	$-1/2, 1/2$	2	$= 2\cdot 1/2 + 1$
3/2	$-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$	4	$= 2\cdot 3/2 + 1$

たしかになってる。

角運動量の量子化

このj, mの操作をquantization of angular momentum

という。

NO.

DATE . .

j, m の正体は何?

〈準備〉

$J_\pm \equiv J_x \pm i J_y$: ladder operator

$J_\pm^\dagger = J_x^\dagger \mp i J_y^\dagger = J_x \mp i J_y = J_\mp$ と決める。

$[J^2, J_\pm] = 0$ ∵ $\underbrace{[J^2, J_x]}_{0} \pm i \underbrace{[J^2, J_y]}_{0} = 0$

$$
\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] \\
&= -i[J_x, J_y] + i[J_y, J_x] \\
&= -i \cdot i\hbar J_z + i \cdot (-i\hbar) J_z \\
&= 2\hbar J_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[J_z, J_\pm] &= [J_z, J_x \pm iJ_y] \\
&= [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y] \\
&= i\hbar J_y \pm i \cdot (-i\hbar) J_x \\
&= \hbar(iJ_y \pm J_x) \\
&= \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) \\
&= \hbar J_\pm
\end{aligned}
$$

NO.

DATE . .

重要公式
Important formula

$\vec{J}^A$, $\vec{J}^B$ で、

$$\vec{J}^A \cdot \vec{J}^B = \frac{1}{2}\left(J_+^A J_-^B + J_-^A J_+^B\right) + J_z^A J_z^B$$

$J_\pm = J_x \pm i J_y$ より、

$$\begin{cases} J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$ となる。

$$\vec{J}_A \cdot \vec{J}_B = J_x^A J_x^B + J_y^A J_y^B + J_z^A J_z^B$$

$$= \frac{1}{2}(J_+^A + J_-^A)\frac{1}{2}(J_+^B + J_-^B) + \left(\frac{1}{2i}\right)^2 (J_+^A - J_-^A)(J_+^B - J_-^B) + J_z^A J_z^B$$

$$= \frac{1}{4}(J_+^A + J_-^A)(J_+^B + J_-^B) - \frac{1}{4}(J_+^A - J_-^A)(J_+^B - J_-^B) + J_z^A J_z^B$$

$$= \frac{1}{4}\left(J_+^A J_-^B + J_-^A J_+^B + J_+^A J_-^B + J_-^A J_+^B\right) + J_z^A J_z^B$$

$$= \frac{1}{2}\left(J_+^A J_-^B + J_-^A J_+^B\right) + J_z^A J_z^B \quad \blacksquare$$

NO.

DATE

今の公式を用いれば、

$$\vec{J}^2 = \vec{J}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \quad \text{——} ①$$

ここで

$[J_+, J_-] = J_+J_- - J_-J_+ = 2\hbar J_z$ だったので、

$$\hbar J_z = \frac{1}{2}(J_+J_- - J_-J_+) \quad \text{——} ②$$

① + ② $\vec{J}^2 + \hbar J_z = J_+J_- + J_z^2$

$$\therefore J_+J_- = J^2 + \hbar J_z - J_z^2$$
$$= J^2 + (\hbar - J_z)J_z$$
$$= J^2 - J_z(J_z - \hbar)$$

① - ② $\vec{J}^2 - \hbar J_z = J_-J_+ + J_z^2$

$$\therefore J_-J_+ = J^2 - \hbar J_z - J_z^2$$
$$= J^2 - J_z(J_z + \hbar)$$

となる。