量子力学3　レポート　2011088 | 古谷.太一

$[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$ 、$|j,m\rangle$: $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$ の同時固有状態.

$(j \in \mathbb{R})$

また、$\langle j,m|j,m\rangle = 1$ である.

いま、$\hat{J}^2|j,m\rangle = C|j,m\rangle$ とすると、

$C = \langle j,m|\hat{J}^2|j,m\rangle$

$= \langle j,m|\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2|j,m\rangle$

$= \langle j,m|\hat{J}_x^2|j,m\rangle + \langle j,m|\hat{J}_y^2|j,m\rangle + \langle j,m|\hat{J}_z^2|j,m\rangle$

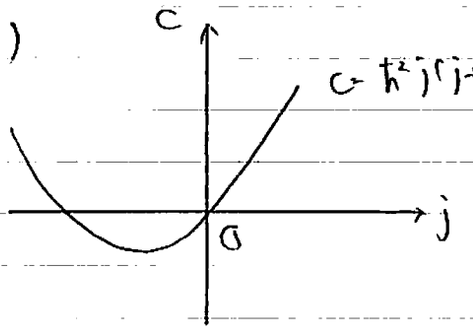
ここで、$\||\hat{J}_z|j,m\rangle\|^2 = (\hat{J}_z|j,m\rangle)^\dagger \hat{J}_z|j,m\rangle$

$= \langle j,m|\hat{J}_z^\dagger \hat{J}_z|j,m\rangle$

$= \langle j,m|\hat{J}_z^2|j,m\rangle$ ($\because \hat{J}_z$ はエルミート演算子)

$\therefore C = \||\hat{J}_x|j,m\rangle\|^2 + \||\hat{J}_y|j,m\rangle\|^2 + \||\hat{J}_z^2|j,m\rangle\|^2 \geq 0$

$\therefore C = \hbar^2 j(j+1)$ とする. $(j \geq 0)$



$\hat{J}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle$

$\hat{J}_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle$

規格直交化

$\langle j,m|j',m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$

完全性

$\sum |j,m\rangle\langle j,m| = 1$

KOKUYO

$J_\pm = J_x \pm i J_y$ とおく。

$[J_z, J_+] = J_z J_+ - J_+ J_z = \hbar J_+$

$\therefore J_z J_+ |j,m\rangle - J_+ J_z |j,m\rangle = \hbar J_+ |j,m\rangle$

$J_z J_+ |j,m\rangle - J_+ \cdot \hbar m |j,m\rangle = \hbar J_+ |j,m\rangle$

$\therefore J_z J_+ |j,m\rangle = \hbar(m+1) J_+ |j,m\rangle$

$|\psi\rangle = J_+ |j,m\rangle$ とおく。

$J_z |\psi\rangle = \hbar(m+1) |\psi\rangle$

$\therefore J_+ |j,m\rangle = |\psi\rangle \sim |j,m+1\rangle$ となる。

同様に、$[J_z, J_-] = J_z J_- - J_- J_z = -\hbar J_-$ より、

$J_z J_- |j,m\rangle - J_- J_z |j,m\rangle = -\hbar J_- |j,m\rangle$

$J_z J_- |j,m\rangle - J_- \hbar m |j,m\rangle = -\hbar J_- |j,m\rangle$

$\therefore J_z J_- |j,m\rangle = \hbar(m-1) J_- |j,m\rangle$

$|\phi\rangle = J_- |j,m\rangle$ とおく。 $J_z |\phi\rangle = \hbar(m-1) |\phi\rangle$

$\therefore J_- |j,m\rangle = |\phi\rangle \sim |j,m-1\rangle$ となる。

以上より、

J_+：上昇演算子、J_-：下降演算子という。

KOKUYO

次に、$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$ を示す。

$\langle\psi|\psi\rangle = \langle j,m|J_+^\dagger J_+|j,m\rangle$ $\quad J_+^\dagger = J_x - iJ_y = J_-$

$= \langle j,m|J_- J_+|j,m\rangle$

ここで、$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_z(J_z+\hbar)$ より、

$= \langle j,m|\vec{J}^2 - J_z(J_z+\hbar)|j,m\rangle$

$= \langle j,m|\vec{J}^2|j,m\rangle - \langle j,m|J_z^2|j,m\rangle - \hbar\langle j,m|J_z|j,m\rangle$

$= \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar\cdot\hbar m$

$= \hbar^2 j(j+1) - \hbar m(\hbar m+\hbar)$

$= \hbar^2\left[j(j+1) - m(m+1)\right]$

$= \hbar^2 (j-m)(j+m+1)$

一方、$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$ より、

$\vec{J}^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$

$\therefore \langle j,m|\vec{J}^2 - J_z^2|j,m\rangle = \langle j,m|\frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)|j,m\rangle$

$= \frac{1}{2}\langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle + \frac{1}{2}\langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle$

ここで、$J_- = J_+^\dagger$, $J_+ = J_-^\dagger$ より、

$= \frac{1}{2}\langle j,m|J_+^\dagger J_+|j,m\rangle + \frac{1}{2}\langle j,m|J_-^\dagger J_-|j,m\rangle$

$= \frac{1}{2}\||J_+|j,m\rangle\|^2 + \frac{1}{2}\||J_-|j,m\rangle\|^2 \geq 0$

KOKUYO

また、$\langle j,m|\vec{J}^2-J_z|j,m\rangle$ について、J_z はエルミート演算子なので、
エルミート演算子なので、

$$\langle j,m|\vec{J}^2-J_z^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)-\hbar^2 m^2$$

$$= \hbar^2\left[j(j+1)-m^2\right] \geq 0$$

$$\therefore\ -\sqrt{j(j+1)} \leq m \leq \sqrt{j(j+1)} \quad \text{である。}$$

いま、$\sqrt{j\cdot j} = j \leq \sqrt{j(j+1)}$ より、

$$-j \leq m \leq j \quad -(*)$$

次に、$\langle\psi|\psi\rangle = \hbar^2(j-m)(j+m-1)$ について、(*) より、

$$j+m-1 \geq j-j-1 = -1 > 0$$

$$\therefore \langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \text{ より、}$$

$j \neq m$ のとき、$|\psi\rangle \neq 0$

また、$\langle\phi|\phi\rangle = \langle j,m|J_+^\dagger J_-|j,m\rangle = \langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle$

$$= \langle j,m|\vec{J}^2-J_z(J_z-\hbar)|j,m\rangle$$

$$= \hbar^2 j(j+1)-\hbar^2 m^2+\hbar\cdot\hbar m$$

$$= \hbar^2\left[j(j+1)-m(m-1)\right]$$

$$= \hbar^2(j+m)(j-m+1)$$

$j-m+1 \geq 1$ より、$j \neq -m$ のとき、$|\phi\rangle \neq 0$

$|j,m\rangle$ について.

$J_+|j,m\rangle \sim |j,m+1\rangle$, $J_+^2|j,m\rangle \sim |j,m+2\rangle$

$J_-|j,m\rangle \sim |j,m-1\rangle$, $J_-^2|j,m\rangle \sim |j,m-2\rangle$

次のような m_1, m_2 について考える.

$\forall j \in \mathbb{R}, \exists m_1, \exists -m_2$ s.t. $J_+|j,m_1\rangle = 0$, $J_-|j,-m_2\rangle = 0$

$\therefore \|J_+|j,m_1\rangle\|^2 = 0$ より, $j = m_1$

$\|J_-|j,-m_2\rangle\|^2 = 0$ より, $j = -(-m_2) = m_2$

$|j,j\rangle \to |j,j-1\rangle \to \cdots \to |j,j-k\rangle = |j,-j\rangle$

$\therefore$ k回下降演算子を作用させて, 以下のようになった.

$j-k = -j$ より, $j = \frac{1}{2}k$ なので.

$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$ のこと. "角運動量の量子化" という.

KOKUYO