量子力学3　レポート　20111081　古谷.太一

2つのspin … $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$

$\mathbf{S}_1$: $[S_{1i}, S_{1j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_{1k}$

$\mathbf{S}_2$ $[S_{2i}, S_{2j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_{2k}$

$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ は独立 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $[S_{1i}, S_{2j}] = 0 \quad (^\forall i, j)$

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1^2|s_1, m_1\rangle = \hbar^2 s_1(s_1+1)|s_1, m_1\rangle \quad (s_1 = \frac{1}{2}) \\ S_{1z}|s_1, m_1\rangle = \hbar m_1|s_1, m_1\rangle \\ \mathbf{S}_2^2|s_2, m_2\rangle = \hbar^2 s_2(s_2+1)|s_2, m_2\rangle \quad (s_2 = \frac{1}{2}) \\ S_{2z}|s_2, m_2\rangle = \hbar m_2|s_2, m_2\rangle \end{cases}$$

全体の状態について考える。

$$|s_1, m_1\rangle|s_2, m_2\rangle \overset{def}{=} |s_1, m_1, s_2, m_2\rangle$$

また、テンソル積を用いて、$|s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle$ とかいて、
($|\mathbf{S}_1$の状態$\rangle \otimes |\mathbf{S}_2$の状態$\rangle$)

$$S_{1i}|A\rangle \otimes |B\rangle = S_{1i} \otimes 1 \; |A\rangle \otimes |B\rangle$$

∵ $S_{1i} \otimes 1 = S_{1i}$ と書いている。

$$S_{2i}|A\rangle \otimes |B\rangle = 1 \otimes S_{2i} \; |A\rangle \otimes |B\rangle$$

∵ $1 \otimes S_{2i} = S_{2i}$ と書いている。

KOKUYO

いま、$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ とする
$(= \boldsymbol{S}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \boldsymbol{S}_2)$

$$S_i = S_{1i} + S_{2i}$$

$$[S_i, S_j] = [S_{1i} + S_{2i}, S_{1j} + S_{2j}]$$
$$= [S_{1i}, S_{1j}] + [S_{2i}, S_{2j}]$$
$$= i\hbar \varepsilon_{ijk} S_{1k} + i\hbar \varepsilon_{ijk} S_{2k}$$
$$= i\hbar \varepsilon_{ijk} (S_{1k} + S_{2k})$$
$$= i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$$

$\therefore [S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$ より、$\boldsymbol{S}$ は角運動量

$\boldsymbol{S}$ の状態はどうなるか

$$\begin{cases} \boldsymbol{S}^2 |s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m\rangle \\ S_z |s, m\rangle = \hbar m |s, m\rangle \end{cases}$$

また、$S_\pm = S_x \pm i S_y$ とすると、(S_+：上昇演算子、S_-：下降演算子)

$$S_+ |s, s\rangle = 0$$

$$S_- |s, -s\rangle = 0$$

$$m = \underbrace{-s, -s+1, \cdots, s-1, s}_{2s+1 \text{個}}$$

状態について2通りの表現をする。

$$|s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle = |\overset{\frac{1}{2}}{s_1}, m_1, \overset{\frac{1}{2}}{s_2}, m_2\rangle \overset{\text{省略}}{=} |m_1, m_2\rangle$$

$$\overset{\text{def}}{=} |s, m\rangle$$

$$S_z |s_1, m_1, s_2, m_2\rangle = (S_{1z} + S_{2z}) |s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle$$

$$= S_{1z} |s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle + |s_1, m_1\rangle S_{2z} |s_2, m_2\rangle$$

$$= \hbar m_1 |s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle + \hbar m_2 |s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) |s_1, m_1, s_2, m_2\rangle$$

また、$S_z |s, m\rangle = m |s, m\rangle$ $\therefore$ $m = m_1 + m_2$

$s_1 = \frac{1}{2}$、$s_2 = \frac{1}{2}$ より、

$m_1 : -s_1 = -\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = s_1$

$\therefore$ $m_1 = -s_1, s_1$

同様に、$m_2 = -s_2, s_2$

以降、$\frac{1}{2} \to \uparrow$、$-\frac{1}{2} \to \downarrow$ と書く

$$|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle = |m_1, m_2\rangle$$

$$= \begin{cases} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$$

$$S_z|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{=m}|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar|\uparrow\uparrow\rangle$$

また、$S_+|\uparrow\uparrow\rangle = (S_{1+}+S_{2+})|\uparrow_1\uparrow_2\rangle = S_{1+}|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle S_{2+}|\uparrow_2\rangle$

$|s_1, m_1\rangle$, $s_1 = \frac{1}{2}$ について、

$$S_{1+}|\uparrow_1\rangle = S_{1+}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 0$$

同様に、$S_{2+}|\uparrow_2\rangle = 0$

$\therefore S_+|\uparrow\uparrow\rangle = 0$

また、$S_z|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar\cdot 1|\uparrow\uparrow\rangle$ $\therefore$ 状態が $|\uparrow\uparrow\rangle \to m = 1$

$\therefore S_+|\uparrow\uparrow\rangle = 0$ について、$m = -s, \cdots, s$ $(2s+1$ 個$)$ であるので、

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |s=1, m=1\rangle = |1,1\rangle$$

さらに、$|1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2\cdot 1}} S_-|1,1\rangle$

$$\left(\because\ |j, m-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} J_-|j,m\rangle\right)$$

$$\therefore |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_-|1,1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_-|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}+S_{2-})|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\left(S_{1-}|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle S_{2-}|\uparrow_2\rangle\right)$$

いま、$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-1\right\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{1}} S_-\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\hbar} S_-|\uparrow_1\rangle$

$= |\downarrow_1\rangle$

$\therefore$ $S_{1-}|\uparrow_1\rangle = \hbar|\downarrow_1\rangle$, $S_{2-}|\uparrow_2\rangle = \hbar|\downarrow_2\rangle$

KOKUYO

$$\therefore\ |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\left(\hbar|\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle\hbar|\downarrow_2\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\right)$$

さらに、$|1,-1\rangle = \frac{1}{\hbar\cdot\sqrt{2}} S_- |1,0\rangle$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_- \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar 2}\left(S_{1-} + S_{2-}\right)\left(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar 2}\left(S_{1-}|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle S_{2-}|\uparrow_2\rangle\right) \quad \left|\ \begin{aligned} S_{1-}|\downarrow_1\rangle &= 0 \\ S_{2-}|\downarrow_2\rangle &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\right)$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} |1,1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle & &: m = 1 \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) & &: m = 0 \\ |1,-1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle & &: m = -1 \end{aligned}\right\}\ 3\text{個}$$

$S=1$ のとき、$m = -1, 0, 1$: 3個 → o.k.

$m=0$ のときの状態について。

$\langle 1,0|\psi\rangle = 0$ となるような $|\psi\rangle$ について考える。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right), \quad m = 0$$

$$\because\ \langle 1,0|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|\right)\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$\left(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\right)^\dagger = \langle\uparrow_2|\langle\uparrow_1|, \quad \langle\uparrow_1|\downarrow_1\rangle = \langle\uparrow_2|\downarrow_2\rangle = 0$$

$$\langle 1,0|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(-1 + 1\right) = 0$$

$$S_+|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{1+}+S_{2+})(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-S_{1+}|\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle S_{2+}|\downarrow_2\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle - |\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\right)$$

$$= 0$$

$\therefore S_+|\psi\rangle = 0 \rightarrow S=0 \quad (S=m)$

つまり、$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

ここで、$S=0 \rightarrow m=0$ (only) $\therefore$ O.K

いま、$|s_1,m_1,s_2,m_2\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$
の4通り

一方、$|s,m\rangle$ で表すと、

$S=1$ のとき、$m=-1,0,1$ $\therefore |S,m\rangle$ は3個
$S=0$ のとき $m=0$ $\therefore |S,m\rangle$ は1個) 計4個

$|s_1,m_1,s_2,m_2\rangle \mapsto |s,m\rangle$ としたとき、次元は変わらない
(基底変換)

また、$|s,m\rangle = |s_1,m_1,s_2,m_2\rangle\langle s_1,m_1,s_2,m_2|s,m\rangle$ である。

和をとる。

$|1,1\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle)\cdot 1, \quad |1,-1\rangle = (|\downarrow\downarrow\rangle)\cdot 1$

$|1,0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$|0,0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

∴ $\left(|1,1\rangle, |1,0\rangle, |0,0\rangle, |1,-1\rangle \right)$ を考えて。

$$= \left(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle \right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\langle \underbrace{s_1, m_1, s_2, m_2}_{\text{行}} | \underbrace{s, m}_{\text{列}} \rangle$$

$\langle s_1, m_1, s_2, m_2 | s, m \rangle$: クレブシュ・ゴルダン係数

実 $|s,m\rangle = |s_1, m_1, s_2, m_2\rangle \langle s_1, m_1, s_2, m_2 | s, m\rangle$

逆 $|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle = |s,m\rangle\langle s,m | s_1, m_1, s_2, m_2\rangle$

$s = 0, 1, \quad m = [-s, s]$

これより $|s,m\rangle = |s,m\rangle\langle s,m | s_1, m_1, s_2, m_2\rangle\langle s_1, m_1, s_2, m_2 | s, m\rangle$

$$\therefore |s,m\rangle = |s',m'\rangle \underbrace{\langle s',m' | s_1, m_1, s_2, m_2\rangle\langle s_1, m_1, s_2, m_2 | s, m\rangle}_{= \langle s',m' | s,m\rangle = \delta_{ss'}\delta_{mm'}}$$

また $|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle = |s_1, m_1, s_2, m_2\rangle\langle s_1, m_1, s_2, m_2 | s, m\rangle\langle s, m | s_1, m_1, s_2, m_2\rangle$ より

$$|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle = |s_1, m_1', s_2, m_2'\rangle \underbrace{\langle s_1, m_1', s_2, m_2' | s, m\rangle\langle s, m | s_1, m_1, s_2, m_2\rangle}$$

$$= \langle s_1, m_1', s_2, m_2' | s_1, m_1, s_2, m_2\rangle$$

$$= \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$$

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$: 合成角運動量

$\vec{J}_1, \vec{J}_2$ について、$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0$

$$\begin{cases} \vec{J}_1^{\,2} |j_1, m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1, m_1\rangle \\ J_{1z} |j_1, m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle \\ \vec{J}_2^{\,2} |j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_2, m_2\rangle \\ J_{2z} |j_2, m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2, m_2\rangle \end{cases}$$

$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k}$ (2), $[J_{1i}, J_{2j}] = 0$ より、

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$$

また、$\vec{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$
$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$

先ほどの議論より、$\{|j, m\rangle\} \Leftrightarrow \{|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\} = \{|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle\}$

∴ 線型変換で移り変わる。

$\therefore |j, m\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle$

$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j, m\rangle\langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$

$\therefore \langle j', m' | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$

$\langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j, m\rangle\langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$

全次元 : $(2j_1+1)(2j_2+1)$

$m_1 = [-j_1, j_1]$, $m_2 = [-j_2, j_2]$

KOKUYO