6/18 授業まとめ　201110867　武井 卓

# 既約テンソル演算子

対称性　回転操作

スカラ → スカラー

ベクトル テンソル ↓

成分あり　ある特定の変換則に従う

ベクトル演算子

$$[L_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$$

$L_i$：無限小回転の生成子，$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

$\vec{V}$. $\vec{L}$：角運動量，$\vec{p}$：運動量，$\vec{r}$：位置ベクトル

テンソル？

慣性テンソル　$r_i r_j$，…

球面調和関数，$f$：任意関数

$$\vec{L}\, Y_{\ell m} f = (\vec{L}\, Y_{\ell m}) f + Y_{\ell m} L f$$

$$\Downarrow$$

$$L_\pm = L_x \pm i L_y$$

$$|j\, m+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}} J_+ |jm\rangle$$

$$|j\, m-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} J_- |jm\rangle$$

$$L_\pm Y_{\ell m} = (L_\pm |\ell m\rangle)$$

$$= \hbar\sqrt{(\ell \pm m+1)(\ell \mp m)}\, |\ell\, m+1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(\ell \pm m+1)(\ell \mp m)}\, Y_{\ell\, m+1}$$

$$\underline{[L_\pm, Y_{\ell m}]} f = L_\pm (Y_{\ell m} f) - Y_{\ell m} L_\pm f = \underline{\hbar\sqrt{(\ell \pm m+1)(\ell \mp m)}\, Y_{\ell\, m\pm 1}}\, f$$

$f$：任意

$$[L_\pm, Y_{\ell m}] = \hbar\sqrt{(\ell \pm m+1)(\ell \mp m)}\, Y_{\ell m\pm 1}$$

$$[L_z, Y_{\ell m}] = \hbar m Y_{\ell m}$$

$$\Rightarrow [J_\pm, T^k_q] = \hbar\sqrt{(k\pm q+1)(k\mp q)}\, T^k_{q\pm 1}$$

$$[J_z, T^k_q] = \hbar q T^k_q$$

$\ell \to k$ 　 $q: \overbrace{-k, \cdots, k}^{2k+1コ}$

$m \to q$

となる.

$T^k_q$ : k階の既約テンソル演算子

$k=1$ の時

$$[J_\pm, T^1_q] = \hbar\sqrt{(2\pm q)(1\mp q)}\, T^1_{q\pm 1}$$

$q=1 \Rightarrow [J_+, T^1_1] = 0$ , $[J_-, T^1_1] = \hbar\sqrt{2}\, T^1_0$

$q=0 \Rightarrow [J_+, T^1_0] = \hbar\sqrt{2}\, T^1_1$ , $[J_-, T^1_0] = \hbar\sqrt{2}\, T^1_{-1}$

$q=-1 \Rightarrow [J_+, T^1_{-1}] = \hbar\sqrt{2}\, T^1_0$ , $[J_-, T^1_{-1}] = 0$

$$[J_z, T^1_q] = \hbar q T^1_q$$

ベクトル演算子, $\vec{J}$

$[J_+, J_+] = 0$, $[J_-, J_+] = -2\hbar J_z$ 　 $-\sqrt{2}\, T^1_1 = J_+$

$[J_+, J_z] = -\hbar J_+$ , $[J_-, J_z] = \hbar J_-$ 　 $T^1_0 = J_z$

$\sqrt{2}\, T^1_{-1} = J_-$

$\searrow$ $[J_+, T^1_0] = -\hbar(-\sqrt{2}\, T^1_1) = \hbar\sqrt{2}\, T^1_1$

$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$, $[J_-, J_-] = 0$

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$$

$J_\pm = J_x \pm i J_y$ 　 $T^1_q$ , $q = 1, 0, -1$

1階の既約テンソル

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} J_+ \equiv T^1_1 , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} J_- = T^1_{-1} , \quad J_z = T^1_0$$

ベクトル演算子

$$[J_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$$

$T^1_q$：1階既約テンソル

$$T^1_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} V_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y)$$

$$T^1_0 = V_z$$

$$T^1_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)$$

## 積 → 高階のテンソル

c.f. $T_{ij} = r_i r_j$

☆ 既約テンソル演算子の積

$$T^k_q \equiv \sum_{q_1 q_2} T^{k_1}_{q_1} T^{k_2}_{q_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle$$

$\uparrow$ $Y^{k_1}_{q_1}$　$\uparrow$ $Y^{k_2}_{q_2}$　$\uparrow$ Clebsch-Gordan係数

$$|kq\rangle = \sum_{q_1 q_2} \underbrace{|k_1 q_1\rangle |k_2 q_2\rangle}_{|k_1 q_1 k_2 q_2\rangle} \leftarrow ?$$

$T^k_q$ ?

$$[J_z, T^k_q] = \sum_{q_1 q_2} [J_z, T^{k_1}_{q_1} T^{k_2}_{q_2}] \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle$$

$$[J_z, T^{k_1}_{q_1} T^{k_2}_{q_2}] = T^{k_1}_{q_1} \underbrace{[J_z, T^{k_2}_{q_2}]}_{\hbar q_2 T^{k_2}_{q_2}} + \underbrace{[J_z, T^{k_1}_{q_1}]}_{\hbar q_1 T^{k_1}_{q_1}} T^{k_2}_{q_2}$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

$$= \sum_{q_1 q_2} \hbar \underbrace{(q_1 + q_2)}_{q} T^{k_1}_{q_1} T^{k_2}_{q_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle$$

$q = q_1 + q_2$ の時のみ $\neq 0$

$$\hbar\sqrt{(k_2\mp(q_2\mp1))(k_2\pm(q_2\mp1))} = \sqrt{(k_2\mp q_2\pm1)(k_2\pm q_2)}$$

$$[J_z, T^k_q] = \hbar q T^k_q$$

$$\hbar\sqrt{(k_2\mp q_2)(k_2\pm q_2+1)}\, T^{k_2}_{q_2\pm1}$$

$$[J_\pm, T^k_q] = \sum_{q_1 q_2}\Big[T^{k_1}_{q_1}[J_\pm, T^{k_2}_{q_2}]\langle k_1q_1k_2q_2|kq\rangle \leftarrow q_2\pm1\to q_2$$

$$\hbar\sqrt{(k_1\mp q_1)(k_1\pm q_1+1)}\, T^{k_1}_{q_1\pm1} \qquad q_2\to q_2\mp1$$

$$+[J_\pm, T^{k_1}_{q_1}]T^{k_2}_{q_2}\langle k_1q_1k_2q_2|kq\rangle$$

$$q_1\pm1\to q_1$$
$$q_1\to q_1\mp1$$

$$= \sum_{q_1q_2} T^{k_1}_{q_1}T^{k_2}_{q_2}\Big[\hbar\sqrt{(k_2\mp q_2+1)(k_2\pm q_2)}\langle k_1q_1,k_2q_2\mp1|kq\rangle$$

$$+\hbar\sqrt{(k_1\mp q_1+1)(k_1\pm q_1)}\langle k_1q_1\mp1,k_2q_2|kq\rangle\Big]$$

$$[\quad] \to \underbrace{\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}}_{*}\langle k_1q_1k_2q_2|kq\pm1\rangle$$

$$\langle k_1q_1k_2q_2|(\underbrace{J_{1\pm}+J_{2\pm}}_{J_\pm})|kq\rangle$$

$$\bigcirc|kq\pm1\rangle$$

$$[J_\pm, T^k_q] = \sqrt{\bigcirc}\, T^k_{q\pm1}$$

$$= \sqrt{*}\sum_{q_1q_2} T^{k_1}_{q_1}T^{k_2}_{q_2}\langle k_1q_1k_2q_2|kq\pm1\rangle$$

✱既約テンソル演算子の積

$$T^k_q \equiv \sum_{q_1q_2} T^{k_1}_{q_1}T^{k_2}_{q_2}\langle k_1q_1k_2q_2|kq\rangle$$

ベクトル⊗ベクトル

$$1\otimes1 = 2\oplus1\oplus0$$

2階テンソル，1階テンソル，0階テンソル

　　　　　↑ベクトル　　　↑スカラー

$$k = k_1+k_2, \dots, |k_1-k_2|$$

$$q : -k\to k \quad (2k+1)$$