NO

DATE

量子力学3　演習問題6　　20111085Z　　工藤咲子

問題1　$j_1=1$, $j_2=\frac{1}{2}$ のとき.

$j_{min} = |1-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $j_{max} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$J_z |11\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = (J_{1z}+J_{2z})|01\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = (1+\frac{1}{2})|11\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$

$= \frac{3}{2}|11\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$ ——①

$J_+ |11\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = 0$ ——② $(\because m_1=-1,0,1\ ,\ m_2=-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$J_z |\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle = \frac{3}{2}|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle$ ——③

①～③より、 $|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle = |11\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$ ——④

$J_-|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1)}\,|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}\,|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$ ——⑤

$J_-|11\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \hbar\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$= \hbar\sqrt{2}\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \hbar\,|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑥

⑤, ⑥より、 $\hbar\sqrt{3}\,|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \hbar\,|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$\therefore |\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑦

$J_-|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle = 2\hbar\,|\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑧

$J_-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\hbar\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\sqrt{1\cdot1} + \sqrt{\frac{1}{3}}\hbar\sqrt{2\cdot1}\right)|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\hbar\,|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

⑧, ⑨より、 $2\hbar\,|\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{3}\,|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \hbar\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$\therefore |\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑩

$J_-|\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1)}\,|\frac{3}{2}\,-\frac{3}{2}\rangle = \sqrt{3}\,\hbar\,|\frac{3}{2}\,-\frac{3}{2}\rangle$ ——⑪

$J_-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\hbar\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|1-1\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\hbar\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|1-1\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\hbar\,|1-1\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑫

⑪, ⑫より、 $\hbar\sqrt{3}\,|\frac{3}{2}\,-\frac{3}{2}\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\hbar\,|1-1\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$|\frac{3}{2}\,-\frac{3}{2}\rangle = |1-1\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑬

⑦より、

$|(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

であるから、

$|(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\rangle = a\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + b\,|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

とおく。ただし、$a<0$, $b>0$とする。

$\left.\begin{aligned}\langle\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle &= a^2+b^2=1\\ \langle\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}a+\frac{1}{\sqrt{3}}b=0\end{aligned}\right\}$ ——⑭

⑭をとくと、 $b=-\sqrt{2}a$, $a^2+2a^2=1$, $a^2=\frac{1}{3}$, $a=-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$

よって、

$|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑮

$J_-|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle = \hbar\,|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑯

$J_-\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|11\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle\right) = -\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\hbar\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\hbar\sqrt{1\cdot1}\,|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\hbar\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$= -\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\,|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\hbar\,|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑰

⑯, ⑰より、 $\hbar\,|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\,|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\hbar\,|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1-1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|10\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$ ——⑱

KOKUYO

したがって. Clebsch-Gordan 係数は、④, ⑦, ⑩, ⑬, ⑮, ⑱ より.

$\langle 1\,1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\rangle = 1$,

$\langle 1\,0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\quad \langle 1\,1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}$,

$\langle 1\,-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\quad \langle 1\,0\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$\langle 1\,-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}\rangle = 1$,

$\langle 1\,0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\quad \langle 1\,1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$\langle 1\,-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\quad \langle 1\,0\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}$ //

問題2. $S=\frac{1}{2}$ の3つのスピン $\vec{S}_i$ $(i=1,2,3)$

$H_3 = J(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 + \vec{S}_2\cdot\vec{S}_3 + \vec{S}_3\cdot\vec{S}_1)$, $\vec{S}_i^{\,2} = \hbar^2\frac{3}{4}$

(i) $|s_1 s_2 s_3\rangle = |s_1\rangle\otimes|s_2\rangle\otimes|s_3\rangle$, $s_i = \uparrow\downarrow$

各状態は. $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の2通り

$2\times2\times2 = 8$ 通り.

$(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$ //

(ii) $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ とすると、

$\vec{S}^2 = (\vec{S}_1+\vec{S}_2+\vec{S}_3)^2 = \vec{S}_1^{\,2} + \vec{S}_2^{\,2} + \vec{S}_3^{\,2} + 2(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 + \vec{S}_2\cdot\vec{S}_3 + \vec{S}_3\cdot\vec{S}_1)$

$= 3\times\frac{3}{4}\hbar^2 + 2\cdot\frac{H_3}{J}$

$= \frac{9}{4}\hbar^2 + \frac{2}{J}H_3$

$\therefore H_3 = J\vec{S}^2 - \frac{9}{4}J\hbar^2$ //

(iii) $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\otimes(\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2}\otimes(0\oplus1)$

$= (\frac{1}{2}\otimes0)\oplus(\frac{1}{2}\otimes1)$

$= \frac{1}{2}\oplus(\frac{1}{2}\oplus\frac{3}{2})$

$= \frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}\oplus\frac{3}{2}$ //

$J_1\otimes J_2 = (J_1+J_2)\oplus(J_1+J_2-1)\oplus\cdots$
$\cdots\oplus(|J_1-J_2|+1)\oplus|J_1-J_2|$

(iv) H_3 のエネルギー準位

状態 … $S=\frac{1}{2}$ のとき. $|\frac{1}{2}\,m\rangle$ $m=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

$S=\frac{3}{2}$ のとき. $|\frac{3}{2}\,m\rangle$ $m=-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}$

$H_3|\frac{1}{2}\,m\rangle = (J\vec{S}^2 - \frac{9}{4}J\hbar^2)|\frac{1}{2}\,m\rangle = J\vec{S}^2|\frac{1}{2}\,m\rangle - \frac{9}{4}J\hbar^2|\frac{1}{2}\,m\rangle$

$= -\frac{3}{2}\hbar^2 J|\frac{1}{2}\,m\rangle$ ($\vec{S}^2$ の固有値 $\hbar^2\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)$)

$H_3|\frac{3}{2}\,m\rangle = (J\vec{S}^2 - \frac{9}{4}J\hbar^2)|\frac{3}{2}\,m\rangle = (J\hbar^2\cdot\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{9}{4}J\hbar^2)|\frac{3}{2}\,m\rangle$

$= \frac{3}{2}\hbar^2 J|\frac{3}{2}\,m\rangle$

よって.

エネルギー準位 E_S は. (縮退度 $(2S+1)\times$(iii))

$S=\frac{1}{2}$ … $E_{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}\hbar^2 J$ (縮退度 $2\times2=4$ //)

$S=\frac{3}{2}$ … $E_{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\hbar^2 J$ (縮退度 $4\times1=4$ //)

NO 3.

DATE

2. (v) H_3 の固有関数

$|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle$

$|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle$

$|\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$

$|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\rangle$

$|\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\rangle$

$|\frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}\rangle$

3. 2つのスピン S のスピン $\vec{S}_i$ $(i=1,2)$,

$H_1^s = J_1 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, $\vec{S}^2 i = \hbar^2 S(S+1)$

(i) $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ とすると.

$\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$

$= 2\hbar^2 S(S+1) + 2 \cdot \frac{H_1^s}{J_1}$

$\therefore H_1^s = \frac{1}{2}\vec{S}^2 J_1 - \hbar^2 S(S+1) J_1$ //

(ii) $S \otimes S = (S+S) \oplus (S+S-1) \oplus \cdots \oplus (S-S+1) \oplus (S-S)$

エネルギー準位

・ $E_{2S} = \frac{1}{2} \cdot J_1 (2S)(2S+1)\hbar^2 - \hbar^2 S(S+1) J_1$

$= \hbar^2 J_1 S^2$ //

(縮退度 $2S, \cdots, -2S$ より $2(2S)+1 = 4S+1$ 重)

・ $E_{2S-1} = \frac{1}{2} J_1 (2S-1)(2S-1+1)\hbar^2 - \hbar^2 S(S+1) J_1$

$= \hbar^2 J_1 S(S-2)$ //

(縮退度 $2S-1, \cdots, -(2S-1)$ より, $2(2S-1)+1 = 4S-1$ 重)

$x = 2S-2, 2S-3, \cdots, 1$ のとき、まとめて

・ $E_x = \frac{1}{2} J_1 x(x+1)\hbar^2 - \hbar^2 S(S+1) J_1$

$= \hbar^2 J_1 \left(\frac{1}{2}x(x+1) - S(S+1)\right)$ // =

(縮退度 $x, \cdots, -x$ より. $2x+1$ 重)

・ $E_0 = \frac{1}{2} J_1 0 \cdot (0+1)\hbar^2 - \hbar^2 S(S+1) J_1$

$= \hbar^2 J_1 S(-S-1) = \hbar^2 S(S-(2S+1))$ //

(縮退度 $2 \cdot 0 + 1 = 1$ 重)

(iii) $H_m^s : J_m (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^m$

$\vec{S}^2 = 2\hbar^2 S(S+1) + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ より.

$(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^m = \left(\frac{1}{2}\vec{S}^2 - \hbar^2 S(S+1)\right)^m = \frac{H_m^s}{J_m}$

$H_m^s = J_m \left(\frac{1}{2}\vec{S}^2 - \hbar^2 S(S+1)\right)^m$

$= J_m \left(\frac{H_1^s}{J_1}\right)^m$

$= \frac{J_m}{J_1^m} (H_1^s)^m$

KOKUYO

NO. 4

DATE

3. (iii) $S \otimes S = 2S \oplus 2S-1 \oplus \cdots \oplus 0$ より

$E_{2S}^{m} = \frac{J_m}{(\hbar)^m} (\hbar^2 J_\hbar S^2)^m = \hbar^{2m} J_m S^{2m}$

縮退度 $2 \cdot 2S + 1 = 4S + 1$ 重 //

$E_{2S-1}^{m} = \frac{J_m}{(\hbar)^m} (\hbar^2 J_\hbar S(S-2))^m = \hbar^{2m} J_m S^m (S-2)^m$

縮退度 $2 \cdot (2S-1) + 1 = 4S - 1$ 重 //

$E_0^m = \frac{J_m}{(\hbar)^m} (\hbar^2 J_\hbar S(-S-1))^m = \hbar^{2m} J_m S^m (-S-1)^m$

縮退度 $2 \cdot 0 + 1 = 1$ 重 //

4. $S = \frac{1}{2}$ のスピン N 個からなる系. N は偶数

$H_N = J \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{N} \vec{S_i} \cdot \vec{S_j}$, $\vec{S_i}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$

(i) $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2} + \cdots + \vec{S_N} = \sum_i^N \vec{S_i}$ とすると.

$\vec{S}^2 = (\sum_i^N \vec{S_i})^2$

$= \sum_{i=1}^{N} \vec{S_i}^2 + 2 \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{N} \vec{S_i} \cdot \vec{S_j} \right)$

$= N \times \frac{3}{4}\hbar^2 + 2 \cdot \frac{H_N}{J}$

$\therefore H_N = \frac{1}{2} J \vec{S}^2 - \frac{3}{8} \hbar^2 J N$ //

(ii) $|s_1, \cdots, s_N\rangle$, $s_i = \pm \frac{1}{2}$

$\underbrace{\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \cdots \otimes \frac{1}{2}}_{N\text{コ}}$ より, 2^N コ //

(iii) N 個のうち, m コが ↓ $N-m$ 個が ↑ としたとき.

$S_z |s_1, \cdots, s_N\rangle = \hbar \left(-\frac{1}{2} \cdot m + \frac{1}{2}(N-m) \right) |s_1, \cdots, s_N\rangle$

$= \hbar \left(\frac{N}{2} - m \right) |s_1, \cdots, s_N\rangle$

$= \hbar M |s_1, \cdots, s_N\rangle$

とすれば, $M = \frac{N}{2} - m$ となる。この状態の個数 D_M は

N 個のものから m コ取る組み合わせに等しく.

$D_M = \binom{N}{m} = \frac{N!}{(N-m)!\, m!}$

$m = \frac{N}{2} - M$ と代入すれば,

$D_M = \binom{N}{\frac{N}{2} - M} = \frac{N!}{(N - \frac{N}{2} + M)!\,(\frac{N}{2} - M)!} = \frac{N!}{(\frac{N}{2} + M)!\,(\frac{N}{2} - M)!}$ //

4. (iv) $\vec{S}^2 |s_1, \cdots, s_N\rangle = \hbar^2 S(S+1) |s_1, \cdots, s_N\rangle$

$S_z |s_1, \cdots, s_N\rangle = \hbar S |s_1, \cdots, s_N\rangle$

となる状態数 d_S を求める。

1) N個のうち 全てのスピンが ↑ のとき、(iii) で $m=0$ とすれば、$M = \frac{N}{2} = S$

よって $S_z |s_1, \cdots, s_N\rangle = \hbar S |s_1, \cdots, s_N\rangle$ より、

状態数 d_S は、$d_S = D_S$

2) N個のうち $m(\neq 0)$ 個のスピンが ↓ のとき、$M = \frac{N}{2} - m \cdot S$

よって $S_z |s_1, \cdots, s_N\rangle = \hbar\left(\frac{N}{2} - m\right) |s_1, \cdots, s_N\rangle$

これを満たす状態数は、D_S

さらに $\vec{S}^2 |s_1, \cdots, s_N\rangle = \hbar^2 S(S+1) |s_1, \cdots, s_N\rangle$ も満たすとき、$m \neq 0$ なので、

$= \hbar^2 \left(\frac{N}{2} - m\right)\left(\frac{N}{2} - m + 1\right) |s_1, \cdots, s_N\rangle$

ここから

$S_z = \hbar S(S+1)$ を満たす状態に S_- を作用させると S も1減る状態の数だけ余分な状態があるから、

状態数 d_S は、$d_S = D_S - \binom{N}{m-1} = D_S \frac{N!}{(m-1)!(N-(m-1)!)}$

$= D_S - \binom{N}{\frac{N}{2}-(S+1)} = D_S - D_{S+1}$ //

$$\therefore d_S = \begin{cases} D_S & S = N/2 \\ D_S - D_{S+1} & S = 0, \cdots, N/2 - 1 \end{cases}$$

(v) $\sum_{S=0}^{N/2} (2S+1) d_S = 2^N$

(物理的) … $\vec{S}^2 |s_1, \cdots, s_N\rangle = \hbar^2 S(S+1) |s_1, \cdots, s_N\rangle$,

$S_z |s_1, \cdots, s_N\rangle = \hbar S |s_1, \cdots, s_N\rangle$

を満たす S は $S = 0, 1, 2, \cdots, \frac{N}{2}$ 通りあり、それぞれ $(2S+1)$ 重に縮退しており、それぞれについて状態数は d_S ある。この合計は全状態の 2^N に等しい。

(数学的) $\sum_{S=0}^{N/2} (2S+1) d_S = \sum_{S=0}^{N/2-1} (2S+1)(D_S - D_{S+1}) + \left(2 \cdot \frac{N}{2} + 1\right) D_{\frac{N}{2}}$

$= 1 \cdot (D_0 - D_1) + 3(D_1 - D_2) + \cdots + (N-1)\left(D_{\frac{N}{2}-1} - D_{\frac{N}{2}}\right) + (N+1) D_{\frac{N}{2}}$

$= D_0 + 2D_1 + 2D_2 + \cdots + 2D_{\frac{N}{2}-1} + 2D_{\frac{N}{2}}$

$= D_0 + 2\left(\sum_{S=1}^{N/2} D_S\right)$

$= \binom{N}{\frac{N}{2}} + 2\left(\binom{N}{\frac{N}{2}-1} + \binom{N}{\frac{N}{2}-2} + \cdots + \binom{N}{1} + \binom{N}{0}\right)$

ここで、$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$ を使うと、

$= \left(\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{\frac{N}{2}-2} + \binom{N}{\frac{N}{2}-1}\right) + \binom{N}{\frac{N}{2}} + \left(\binom{N}{\frac{N}{2}+1} + \binom{N}{\frac{N}{2}+2} + \cdots + \binom{N}{N-1} + \binom{N}{N}\right)$

$= \sum_{S=0}^{N} \binom{N}{S} = (1+1)^N = 2^N$ //

問題4 (vi) H_N の全固有値

$S=0, 1, 2, \cdots, \frac{N}{2}$ の $\frac{N}{2}+1$ 通り.

$$H_N|SM\rangle = \left(\frac{1}{2}J\vec{S}^2 - \frac{3}{8}\hbar^2 JN\right)|SM\rangle$$
$$= \left(\frac{1}{2}J\hbar^2 S(S+1) - \frac{3}{8}\hbar^2 JN\right)|SM\rangle$$
$$= J\hbar^2\left(\frac{1}{2}S(S+1) - \frac{3}{8}N\right)|SM\rangle$$

よって. 固有関数 $|SM\rangle$ に関する固有値 E_N^S は.

$$E_N^S = J\hbar^2\left(\frac{1}{2}S(S+1) - \frac{3}{8}N\right)$$

縮退度 $(2S+1)$ 重

$\therefore N=2$ のとき $S_1, S_2 = \frac{1}{2}$

$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

$S = \underset{1+2}{0,\ 1}$ $\quad 1+3$

$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$

$H_2 = J(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)$ $\quad S_i^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$.

$\vec{S}^2 = 2 \cdot \frac{3}{4}\hbar^2 + 2(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)$

$\frac{\vec{S}^2}{2} = \frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{H_2}{J}$

$H_2 = \frac{1}{J}\vec{S}^2 J - \frac{3}{4}\hbar^2 J$

$E_2^S = J\hbar^2\left(\frac{1}{2}S(S+1) - \frac{3}{4}\right)$

$S=0$ $\quad E_2^0 = J\hbar^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}J\hbar^2$ (基)

$S=1$ $\quad E_2^1 = J\hbar^2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}J\hbar^2$ (発)

$(2S+1) = 2\cdot 0+1 = 1$

$(2\cdot 1+1) = 3$

$d_S = D_S - D_{S+1}$

$= \binom{2}{1-0} - \binom{2}{0}$

$= 2C_1 - 2C_0 = 2\cdot 1 - 1 = 1$

$d_S = D_S = \binom{2}{1-1} = 2C_0 = 1$.

$N=4$ のとき

$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \left(\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}\right) = (0\oplus 1) \otimes (0 \oplus 1)$

$= (0\otimes 0) \oplus (1 \otimes 0) \oplus (0 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 1)$

$= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 2$

$= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 2$

(2重) (3重)

$S=0$

$d_S = D_0 - D_1$

$= \binom{4}{2} - \binom{4}{1}$

$= 6 - 4 = 2$

$S=1$

$d_S = D_1 - D_2$

$= \binom{4}{1} - \binom{4}{0}$

$= 4 - 1 = 3$