量子力学3A　5/28(火)

20110844
荻野孝浩

2つのスピン $(s=1/2)$

$\vec{S}_1$、$[S_{1i}, S_{1j}] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} S_{1k}$
$\vec{S}_2$、$[S_{2i}, S_{2j}] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} S_{2k}$

$\vec{S}_1, \vec{S}_2$ は独立であるので可換
$[S_{1i}, S_{2j}] = 0$

状態

$$\vec{S}_1^{\,2} |s_1 m_1\rangle = \hbar^2 s_1(s_1+1) |s_1 m_1\rangle$$
$$S_{1z} |s_1 m_1\rangle = \hbar m_1 |s_1 m_1\rangle$$
$$\vec{S}_2^{\,2} |s_2 m_2\rangle = \hbar^2 s_2(s_2+1) |s_2 m_2\rangle$$
$$S_{2z} |s_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |s_2 m_2\rangle$$

$\left(s_1 = s_2 = \frac{1}{2}\right)$

全体の状態

$$|s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle \equiv |s_1 m_1 s_2 m_2\rangle$$
$$|s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle$$

$|A\rangle \otimes |B\rangle$
↑ S_1の状態　↑ S_2の状態

$$S_{1i} |A\rangle \otimes |B\rangle = S_{1i} \otimes 1\ |A\rangle \otimes |B\rangle$$

$S_{1i} \otimes 1 \sim S_{1i}$ と書いている

$$S_{2i} |A\rangle \otimes |B\rangle = 1 \otimes S_{2i}\ |A\rangle \otimes |B\rangle$$

$1 \otimes S_{2i} \sim S_{2i}$ としている。

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = (\vec{S}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \vec{S}_2)$$

$$S_i = S_{1i} + S_{2i}$$

$$\begin{aligned}
[S_i, S_j] &= [S_{1i} + S_{2i}, S_{1j} + S_{2j}] \\
&= [S_{1i}, S_{1j}] + [S_{2i}, S_{2j}] \\
&= i\hbar\,\varepsilon_{ijk} (S_{1k} + S_{2k}) \\
&= i\hbar\,\varepsilon_{ijk} S_k
\end{aligned}$$

$\vec{S}$：角運動量

$\vec{S}$の状態

$$\vec{S}^{\,2} |s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |sm\rangle$$
$$S_z |sm\rangle = \hbar m |sm\rangle$$

$$\left(\begin{aligned}
&S_\pm = S_x \pm i S_y \\
&S_+ |ss\rangle = 0 \\
&S_- |s\,{-s}\rangle = 0 \\
&m = \underbrace{-s \cdots s}_{2s+1\text{個}}
\end{aligned}\right)$$

状態にかんして2通りの表現

関係？ $|s_1 m_1\rangle|s_2 m_2\rangle = |\overset{1/2}{s_1} m_1 \overset{1/2}{s_2} m_2\rangle = \overset{省略}{|m_1\ m_2\rangle}$

$|s\ m\rangle \leftarrow s、m$ の2つ

$$S_z|s_1 m_1, s_2 m_2\rangle = (S_{1z}+S_{2z})|s_1 m_1\rangle|s_2 m_2\rangle$$
$$= \underbrace{S_{1z}|s_1 m_1\rangle}_{\hbar m_1|s_1 m_1\rangle}|s_2 m_2\rangle + |s_1 m_1\rangle \underbrace{S_{2z}|s_2 m_2\rangle}_{\hbar m_2|s_2 m_2\rangle}$$
$$= \hbar(m_1+m_2)|s_1 m_1\rangle|s_2 m_2\rangle$$
$$= \hbar(m_1+m_2)|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle$$

$$S_z|s\,m\rangle = \hbar m|s\,m\rangle$$

$$m = m_1 + m_2$$

$s_1 = 1/2 \quad s_2 = 1/2$

$m_1 = -s_1 = -1/2 \qquad -1/2 + 1 = 1/2 = s_1$

$$\longrightarrow \quad m_1 = \pm\frac{1}{2}$$
$$m_2 = \pm\frac{1}{2}$$

$$|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle = \begin{cases} |1/2\ 1/2,\ 1/2\ 1/2\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1/2\ 1/2,\ 1/2\ -1/2\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle \\ |1/2\ -1/2,\ 1/2\ 1/2\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle \\ |1/2\ -1/2,\ 1/2\ -1/2\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$$

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |1/2\ 1/2,\ 1/2\ 1/2\rangle$$
$$S_z|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar(1/2 + 1/2)|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar|\uparrow\uparrow\rangle$$
$$S_+|\uparrow\uparrow\rangle = (S_{1+}+S_{2+})|\uparrow\uparrow\rangle = \underbrace{S_{1+}|\uparrow_1\rangle}_{=0}|\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle\underbrace{S_{2+}|\uparrow_2\rangle}_{=0}$$
$$= 0$$

$|s_1 m_1\rangle \quad s_1 = 1/2$

$S_{1+}|1/2\ 1/2\rangle = 0 \qquad S_{2+}|\uparrow_2\rangle = 0$

$\overset{\shortparallel}{S_{1+}|\uparrow_1\rangle}$

$S_+ |\uparrow\uparrow\rangle = 0$
$S_z |\uparrow\uparrow\rangle = \hbar |\uparrow\uparrow\rangle$

$m : \underbrace{-s, -s+1 \cdots s}_{2s+1\,個}$

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |s=1, m=1\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(1+1)(1-1+1)}} S_- |1,1\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} S_- |1,1\rangle$$

$\left(\because \ |j, m-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}} J_- |jm\rangle \quad j=1, m=1 \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} S_- |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} (S_{1-} + S_{2-}) |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \left(S_{1-} |\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle S_{2-} |\uparrow_2\rangle \right)$$

ここで $\left| \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} - 1 \right\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{1 \cdot 1}} S_{1-} \left| \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\hbar} S_{1-} |\uparrow\rangle$

$\Rightarrow \quad |\downarrow\rangle = \frac{1}{\hbar} S_{1-} |\uparrow\rangle$

$S_{1-} |\uparrow_1\rangle = \hbar |\downarrow_1\rangle$
$S_{2-} |\uparrow_2\rangle = \hbar |\downarrow_2\rangle$ より

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \left(\hbar |\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle \hbar |\downarrow_2\rangle \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \right)$$

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{1 \cdot 2}} S_- |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} S_- \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$
$$= \frac{1}{2\hbar} (S_{1-} + S_{2-}) \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$
$$= \frac{1}{2\hbar} \left(S_{1-} |\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle S_{2-} |\uparrow_2\rangle \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(|\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle \right) = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$\left(\begin{array}{l} S_{1-} |\downarrow_1\rangle = 0 \\ S_{2-} |\downarrow_2\rangle = 0 \end{array} \right)$

$|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$

$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$

$|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$

$m = m_1 + m_2$

$|\uparrow\downarrow\rangle$ と $|\downarrow\uparrow\rangle$ 2コ

$m=0$ の状態 2コ

$|\psi\rangle$、$\langle 1,0|\psi\rangle = 0$ となる $|\psi\rangle$ を考える.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \qquad (m=0)$$

$$S_+|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{1+} + S_{2+})(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle) = 0$$

$S_+|\psi\rangle = 0 \rightarrow s = 0$

$s=0,\ m=0$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|s_1 m_1, s_2 m_2\rangle = |\tfrac{1}{2}\, m_1, \tfrac{1}{2}\, m_2\rangle$$

$|\uparrow\uparrow\rangle$、$|\uparrow\downarrow\rangle$、$|\downarrow\uparrow\rangle$、$|\downarrow\downarrow\rangle$ 4通り

$S=1 \quad m=1,0,-1 \quad |s,m\rangle$

$S=0 \quad m=0$ 4通り

基底変換

$$|s\, m\rangle = |s_1 m_1 s_2 m_2\rangle\langle s_1 m_1 s_2 m_2|s\, m\rangle$$

和をとる.

$$|1,1\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle)\cdot 1$$

$$|1,0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$|1,-1\rangle = (|\downarrow\downarrow\rangle)\cdot 1$$

$$|0,0\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$(|1,1\rangle, |1,0\rangle, |0,0\rangle, |1,-1\rangle)$$

$$= (|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \underbrace{s_1 m_1 s_2 m_2}_{行} | \underbrace{sm}_{列} \rangle$$

$\langle s_1 m_1 s_2 m_2 | s m \rangle$

← クレブシュゴルダン係数
Clebsch - Gordan

実

$$|sm\rangle = |s_1 m_1 s_2 m_2\rangle\langle s_1 m_1 s_2 m_2 | sm\rangle$$

$$|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle = |sm\rangle\langle sm | s_1 m_1 s_2 m_2\rangle$$

$s = 0, 1, \quad m : -s \to s$

$$|sm\rangle = |s'm'\rangle \underbrace{\langle s'm' | s_1 m_1 s_2 m_2\rangle\langle s_1 m_1 s_2 m_2 | sm\rangle}_{\delta_{ss'}\delta_{mm'}}$$

$$\langle s'm' | s_1 m_1 s_2 m_2\rangle\langle s_1 m_1 s_2 m_2 | sm\rangle = \delta_{ss'}\delta_{mm'}$$

$$|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle = |s_1 m_1' s_2 m_2'\rangle \underbrace{\langle s_1 m_1 s_2 m_2 | sm\rangle}_{\delta_{m_1 m_1'}} \underbrace{\langle sm | s_1 m_1 s_2 m_2\rangle}_{\delta_{m_2 m_2'}}$$

$$\langle s_1 m_1' s_2 m_2' | sm\rangle\langle sm | s_1 m_1 s_2 m_2\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$$

$s_1 = 1/2 \quad s_2 = 1/2$ のときを考えた。

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J} \qquad 合成角運動量$$

$$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0$$

$\vec{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1 m_1\rangle$
$J_{1z}|j_1 m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle$
$\vec{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1)|j_2 m_2\rangle$
$J_{2z}|j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle$

$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k}$
$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{2k}$

$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$

$J^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle$
$J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle$

$\{|jm\rangle\} \Leftrightarrow \{|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle\}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

線型変換で移りかわる。

$|jm\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle$
$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |jm\rangle\langle jm|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

Clebsch-Cordan 係数

$\langle jm|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1 j_2 m_2|j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$

$\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle\langle jm|j_1 m_1' j_2 m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$

jはどの範囲をうごく？

全行列の次元 $(2j_1+1)(2j_2+1)$

$m_1 : \underbrace{-j_1 \cdots j_1}_{2j_1+1\text{コ}}$ $\qquad = \displaystyle\sum_{j=j_{min}=|j_1-j_2|}^{j_{max}=j_1+j_2}(2j+1)$

$m_2 : \underbrace{-j_2 \cdots j_2}_{2j_2+1\text{コ}}$