量子力学　201110840　宇野 健太

1

問題1

(1)

$$\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

よって

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = E_2$$

(2)
$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_z$$

$$-\sigma_y\sigma_x = -\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ i & -i \end{pmatrix} = i\sigma_z$$

よって

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$$

(3)
$$\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_x$$

$$-\sigma_z\sigma_y = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_x$$

よって

$$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$$

(4)
$$\sigma_z\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y$$

$$-\sigma_x\sigma_z = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y$$

よって

$$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$$

(5)

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

(2)〜(4)から

$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ となるので

$$[S_i, S_j] = \frac{\hbar^2}{4}[\sigma_i, \sigma_j] = \frac{\hbar^2}{4}\cdot 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$
$$= i\hbar\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\hbar}{2}\sigma_k = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

よって

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$$

(6) S_zの固有値$\hbar n$、固有ベクトル$|n\rangle$となると

$S_z|n\rangle = \hbar n|n\rangle$　　$S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ より

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\hbar}{2}\sigma_z - \hbar n\right)|n\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow \hbar\left(\frac{1}{2}\sigma_z - nE_2\right)|n\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow \hbar\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}-n \end{pmatrix}|n\rangle = 0 \quad \text{--- ①}$$

$|n\rangle \neq 0$ なので

$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}-n \end{pmatrix} = 0$ でなければならない。よって

$\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(-\frac{1}{2}-n\right) = 0$　　$n = \pm\frac{1}{2}$

KOKUYO

for $\lambda=\frac{1}{2}$

①は

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}|\lambda\rangle=0 \quad よって\ |\lambda\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

for $\lambda=-\frac{1}{2}$

①は

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}|\lambda\rangle=0 \qquad |\lambda\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

よって

固有値$\frac{1}{2}\hbar$のとき固有ベクトル $|\lambda\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

固有値$-\frac{1}{2}\hbar$のとき固有ベクトル $|\lambda\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(7)

$$\vec{S}^2=S_x^2+S_y^2+S_z^2$$

$$=\frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2) \qquad (1)から$$

$$=\frac{\hbar^2}{4}\cdot 3E_2=\frac{3}{4}\hbar^2$$

(8) (7)より

$\vec{S}^2=\frac{3}{4}\hbar^2$ より

$$\vec{S}^2|\lambda\rangle=\frac{3}{4}\hbar^2|\lambda\rangle$$

となり $|\lambda\rangle$は$\vec{S}^2$の固有ベクトルになる

その固有値を$\hbar^2S(S+1)$とすると

$\hbar^2S(S+1)=\frac{3}{4}\hbar^2$ よって $(S>0)$

$$S=\frac{1}{2}$$

(9) $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma})$

$$=\begin{pmatrix}a_z & a_x-ia_y\\ a_x+ia_y & -a_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_z & b_x-ib_y\\ b_x+ib_y & -b_z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_zb_z+(a_x-ia_y)(b_x+ib_y) & a_z(b_x-ib_y)-b_z(a_x-ia_y)\\ b_z(a_x+ia_y)-a_z(b_x+ib_y) & (a_x+ia_y)(b_x-ib_y)+a_zb_z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_zb_z+a_xb_x+a_yb_y+i(a_xb_y-a_yb_x) & a_zb_x+a_yb_z+a_zb_z+i(a_yb_x-a_xb_y)\\ i(a_yb_z-a_zb_y)-(a_zb_x-a_xb_z) & a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z+i(a_yb_x-a_xb_y)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\vec{a}\cdot\vec{b})+i(\vec{a}\times\vec{b})_z & (\vec{a}\times\vec{b})_y+i(\vec{a}\times\vec{b})_x\\ i(\vec{a}\times\vec{b})_x-(\vec{a}\times\vec{b})_y & (\vec{a}\cdot\vec{b})-i(\vec{a}\times\vec{b})_z\end{pmatrix}$$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{b})E_2+i(\vec{a}\times\vec{b})_z\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+i(\vec{a}\times\vec{b})_x\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$+i(\vec{a}\times\vec{b})_y\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=(\vec{a}\cdot\vec{b})+i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$

問題2

(1) $\vec{n}\cdot\sigma=n_x\sigma_x+n_y\sigma_y+n_z\sigma_x$

$$=\left\{\begin{pmatrix}0&n_x\\n_x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-in_y\\in_y&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n_z&0\\0&-n_z\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}n_z & n_x-in_y\\ n_x+in_y & -n_z\end{pmatrix} \qquad よって$$

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2=\begin{pmatrix}n_z & n_x-in_y\\ n_x+in_y & -n_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_z & n_x-in_y\\ n_x+in_y & -n_z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}n_z^2+n_x^2+n_y^2 & n_z(n_x-in_y)-n_z(n_x-in_y)\\ n_z(n_x+in_y)-n_z(n_x+in_y) & n_z^2+n_x^2+n_y^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E_2 \qquad よって示された$$

(2) $P_\pm = \frac{1}{2}[E_2 \pm (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})]$ に対して

$P_\pm^2 = \frac{1}{4}[E_2 \pm (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})]^2$

$= \frac{1}{4}[E_2^2 \pm (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})E_2 \pm E_2(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2]$

ここで $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = E_2$ より

$P_\pm^2 = \frac{1}{4}[2E_2 \pm 2(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})] = \frac{1}{2}[E_2 \pm (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})] = P_\pm$

よって

$P_\pm^2 = P_\pm$ は示された。

(3) $P_+P_- = \frac{1}{4}[E_2 + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})][E_2 - (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})]$

$= \frac{1}{4}[E_2^2 - (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2]$

$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = E_2$ より

$P_+P_- = 0$.

$P_-P_+ = \frac{1}{4}[E_2 - (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})][E_2 + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})]$

$= \frac{1}{4}[E_2^2 - (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2] = 0$

よって

$P_-P_+ = 0$.

よって

$P_+P_- = P_-P_+ = 0$ は示された。

(4) $P_+ + P_-$

$= \frac{1}{2}[E_2 + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})] + \frac{1}{2}[E_2 - (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})]$

$= E_2$

(5) $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})P_\pm = \frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})[E_2 \pm (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})]$

$= \frac{1}{2}[(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \pm (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2] = \frac{1}{2}[(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \pm E_2]$

$= \pm\frac{1}{2}[E_2 \pm (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})] = \pm P_\pm$ よって

$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})P_\pm = \pm P_\pm$

(6) $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = P_+ - P_-$ より

$(i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^n = (i\varphi)^n(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^n$

$= (i\varphi)^n(P_+ - P_-)^n$

二項定理と$[P_+, P_-] = 0$で可換なので

$(P_+ - P_-)^n = {}_nC_0(P_+)^n - {}_nC_1(P_+)^{n-1}P_- + \cdots + {}_nC_n(-P_-)^n$

で $P_+P_- = P_-P_+ = 0$ より

$(P_+ - P_-)^n = (P_+)^n + (-1)^n(P_-)^n$ で

さらに $P_\pm^2 = P_\pm$ より

$P_\pm^n = P_\pm$ よって

$(i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^n = (i\varphi)^n\{P_+ + (-1)^nP_-\}$

$= (i\varphi)^nP_+ + (-i\varphi)^nP_-$

よって示された。

(7) $e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \sum_{n=0}^{\infty}(i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^n/n!$ である。

ここから

$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty}(i\varphi)^n/n!$, $e^{-i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i\varphi)^n/n!$ —①

が成立。(6)を用いて

$e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\{(i\varphi)^nP_+ + (-i\varphi)^nP_-\}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\{(i\varphi)^n\frac{1}{2}[E_2 + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})] + (-i\varphi)^n\frac{1}{2}[E_2 - (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})]\}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\{E_2\frac{(i\varphi)^n + (-i\varphi)^n}{2} + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\frac{(i\varphi)^n - (-i\varphi)^n}{2}\}$ ...②

ここで①から②は

$E_2\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$

$= E_2\cos\varphi + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\varphi$ よって

$e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = E_2\cos\varphi + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\varphi$

(8) $\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$

$= \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi) \\ \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix}$ より

$u_N' = P_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & 1-\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}$

$v_N' = P_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta e^{-i\phi} \\ -\sin\theta e^{i\phi} & 1+\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ -\sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}$

(9) $|u_N'|^2 = u_N u_N^*$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\} = \frac{1}{4}\{2+2\cos\theta\}$

$= \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$ よって

$|u_N'| = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

同様に

$|v_N'| = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ これから

$u_N = u_N'/|u_N'| = \sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1-\cos\theta}\, e^{i\phi} \end{pmatrix}$ (ただし θは $0 \le \theta \le \pi$ であることを用いた。)

$v_N = v_N'/|v_N'| = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ -\sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} \\ -\sqrt{1+\cos\theta}\, e^{i\phi} \end{pmatrix}$

(10)

$u_s' = P_+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\phi} \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}$

$v_s' = P_-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin\theta e^{-i\phi} \\ 1+\cos\theta \end{pmatrix}$

また

$|u_s'| = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ $\quad |v_s'| = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

よって

$u_s = u_s'/|u_s'| = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\phi} \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+\cos\theta}\, e^{-i\phi} \\ \sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix}$

$v_s = v_s'/|v_s'| = \sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin\theta e^{-i\phi} \\ 1+\cos\theta \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sqrt{1-\cos\theta}\, e^{-i\phi} \\ \sqrt{1+\cos\theta} \end{pmatrix}$

よって $u_N = u_s e^{i\phi}$

$v_N = -v_s e^{i\phi}$

(11) $u_N u_N^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1-\cos\theta}\, e^{i\phi} \end{pmatrix}\left(\sqrt{1+\cos\theta} \quad \sqrt{1-\cos\theta}\, e^{-i\phi}\right)$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & 1-\cos\theta \end{pmatrix} = P_+$

また $u_N = u_s e^{i\phi}$ より

$u_N u_N^\dagger = (u_s e^{i\phi})(u_s e^{i\phi})^\dagger$

$= u_s e^{i\phi} u_s^\dagger e^{-i\phi} = u_s u_s^\dagger$ よって

$P_+ = u_N u_N^\dagger = u_s u_s^\dagger$

$V_N V_N^\dagger$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{1-\cos\theta} \\ -\sqrt{1+\cos\theta}\, e^{i\phi}\end{pmatrix}\left(\sqrt{1-\cos\theta},\ -\sqrt{1+\cos\theta}\, e^{-i\phi}\right)$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta e^{-i\phi} \\ -\sin\theta e^{i\phi} & 1+\cos\theta\end{pmatrix} = P_-$

また

$V_N = -V_S e^{i\phi}$ より

$V_N V_N^\dagger = (-V_S e^{i\phi})(-V_S e^{i\phi})^\dagger$

$= -V_S e^{i\phi}\cdot(-V_S^\dagger)e^{-i\phi}$

$= V_S V_S^\dagger$ よって

$P_- = V_N V_N^\dagger = V_S V_S^\dagger$

問題3

(1) $\mathbb{P} = -i\hbar\nabla$ に対して

$\Theta = i\sigma_2 K$ より

$\Theta^{-1} = -i\sigma_2 K$ となると

$\Theta\Theta^{-1} = (i\sigma_2 K)(-i\sigma_2 K) = E_2$

よって

$\Theta\mathbb{P}\Theta^{-1}$

$= (Ki\sigma_2)\mathbb{P}(-i\sigma_2 K)$

$= K\sigma_2\mathbb{P}\sigma_2 K = K\mathbb{P}K = \mathbb{P}^* = (i\hbar\nabla) = -\mathbb{P}$

(2) $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ に対して

$\Theta\vec{S}\Theta^{-1}$

$= (i\sigma_2 K)\vec{S}(-i\sigma_2 K)$

$= K(i\sigma_2)\vec{S}(-i\sigma_2)K$

$= \frac{\hbar}{2}K(\sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2)K$ — ①

ここで

$K(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)K = \left\{\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\right\}^*$

$= \begin{pmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}^* = -\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = -\sigma_1$

$K(\sigma_2\sigma_2\sigma_2)K$

$= (\sigma_2^3)^* = -\sigma_2$

$K(\sigma_2\sigma_3\sigma_2)K$

$= \left\{\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\right\}^*$

$= \left\{\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}^* = -\sigma_3$ よって

①は

$\frac{\hbar}{2}K(\sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2)K = -\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

よって

$\Theta\vec{S}\Theta^{-1} = -\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} = -\vec{S}$

(3) $\Theta^2 = (i\sigma_2 K)(i\sigma_2 K)$

$= K(i\sigma_2\cdot i\sigma_2)K = -K^2 = -1$

(4) $\langle\psi|\phi\rangle$

$= (|\psi\rangle)^\dagger(\langle\phi|)^\dagger = (\langle\phi|\psi\rangle)^\dagger$

$\langle\phi|\psi\rangle$ は内積でスカラーなので

$(\langle\phi|\psi\rangle)^\dagger = \langle\phi|\psi\rangle^*$

また $\Theta = UK$ として U: ユニタリー行列

$\Theta\Theta^{-1} = 1$ $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ を用いると

$|\Theta\psi\rangle = U|\psi^*\rangle$

$|\Theta\phi\rangle = U|\phi^*\rangle$ なので

$\langle\Theta\phi|\Theta\psi\rangle$

$= (|\Theta\phi\rangle)^\dagger|\Theta\psi\rangle$

$= (U|\phi^*\rangle)^\dagger U|\psi^*\rangle$

$= (\langle\phi^*|U^\dagger U|\psi^*\rangle) = \langle\phi^*|\psi^*\rangle$

$= \langle\phi|\psi\rangle^*$ よって

$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\Theta\phi|\Theta\psi\rangle$

(5) $|\psi^\theta\rangle = \Theta|\psi\rangle$ に対して

$\langle\Theta^2\psi|\Theta\psi\rangle$ について考える

$\Theta^2 = -1$ より

$\langle\Theta^2\psi|\Theta\psi\rangle = -\langle\psi|\Theta\psi\rangle = -\langle\psi|\psi^\theta\rangle$ …①

また(4)の $\langle\psi|\phi\rangle = \langle\Theta\phi|\Theta\psi\rangle$ より

$\phi = \Theta\psi$ とおいて

$\langle\psi|\Theta\psi\rangle = \langle\Theta^2\psi|\Theta\psi\rangle$ …②

①②から

$\langle\psi|\Theta\psi\rangle = \langle\psi|\psi^\theta\rangle = -\langle\psi|\psi^\theta\rangle$

よって

$\underline{\langle\psi|\psi^\theta\rangle = 0}$ //