201010888 佐橋知佳

◎ 角運動量の量子化

$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$ $\qquad J_{123}$

$J_\pm = J_x \pm i J_y, \quad J_i^+ = J_i$: hermite

$[J^2, J_z] = 0, \quad [J^2, J_x] = [J^2, J_y] = 0$

$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$

$$\boxed{\begin{aligned}[J_z, J_\pm] &= \pm\hbar J_z \\ [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z\end{aligned}}$$

$\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = J_{1x} J_{2x} + J_{1y} J_{2y} + J_{1z} J_{2z}$

2種類 $= \frac{1}{2}(J_{1+} J_{2-} + J_{1-} J_{2+}) + J_{1z} J_{2z}$

$J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_+ J_-) + J_z^2$

$J_+ J_- = J^2 - J_z(J_z - \hbar)$

$J_- J_+ = J^2 - J_z(J_z + \hbar)$

$[J^2, J_z] = 0$

同時固有状態 $|jm\rangle$ $\quad \langle jm|jm\rangle = 1$

$J^2|jm\rangle = \hbar j(j+1)|jm\rangle \qquad j(j+1) \geq 0$

$J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle \qquad j \geq 0$

$\langle jm|J^2|jm\rangle = \langle jm|(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)|jm\rangle$

$\geq 0 \quad = \| J_x|jm\rangle\|^2 + \| J_y|jm\rangle\|^2 + |z|^2$

$$J_z(J_+|jm\rangle) = \{J_+J_z + [J_z, J_+]\}|jm\rangle$$

$$= J_+\underbrace{J_z|jm\rangle}_{\hbar m|jm\rangle} + \hbar J_+|jm\rangle$$

$$J_z(J_+|jm\rangle) = \hbar(m+1)\, J_+|jm\rangle$$

$$J_+|jm\rangle \propto |jm+1\rangle, \quad J_-|jm\rangle \propto |jm-1\rangle$$

$$\boxed{(J_+)^k|jm\rangle \propto |jm+k\rangle}, \quad \boxed{(J_-)^k|jm\rangle \propto |jm-k\rangle}$$

$$J_z(J_-|jm\rangle) = \{J_-J_z + \underbrace{[J_z, J_-]}_{-\hbar J_-}\}|jm\rangle$$

$$= J_-\hbar m|jm\rangle - \hbar J_-|jm\rangle$$

$$= \hbar(m-1)(J_-|jm\rangle)$$

$$J^2 - J_z^2 = J_x^2 + J_y^2$$

$$\underbrace{\langle jm|\underbrace{J^2 - J_z^2}_{J_x^2+J_y^2}|jm\rangle}_{\|J_x|jm\rangle\|^2 + \|J_y|jm\rangle\|^2 \geq 0} = (\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2)\underbrace{\langle jm|jm\rangle}_{1}$$

$$= \hbar^2[\underbrace{j(j+1) - m^2}_{\geq 0}]$$

$$j(j+1) - m^2 \geq 0$$

$$\uparrow$$

$$* \leq m \leq *$$

$$|jm\rangle \to |jm-1\rangle \to |jm-2\rangle \cdots$$

$$\searrow |jm+1\rangle \to |jm+2\rangle \cdots$$

mには最大と最小がある（jごとに）

● mの最大値 m_1

$$J_+|jm_1\rangle = 0$$

$$\| J_+ |j m_1\rangle \|^2$$

$$= \langle j m_1 | J_- J_+ | j m_1 \rangle = 0$$

$$= \langle j m_1 | \{ J^2 - J_z (J_z + \hbar) \} | j m_1 \rangle$$

$$= \hbar^2 [j(j+1) - m_1 (m_1 + 1)]$$

$$0 = j(j+1) - m_1 (m_1 + 1)$$

$$= j^2 + j - m_1^2 - m_1 = (j + m_1)(j - m_1) + (j - m_1)$$

$$= (j - m_1)(j + m_1 + 1), \quad m_1 > 0$$

$$m_1 - j$$

$$J_+ |j j\rangle = 0$$

● m の最小値 $-m_2$

$$J_- |j -m_2\rangle = 0$$

$m_2 \geq 0$

$$\| J_- |j -m_2\rangle \|$$

$$= \langle j -m_2 | J_+ J_- | j -m_2 \rangle$$

$$= \langle j -m_2 | \{ J^2 - J_z (J_z - \hbar) \} | j -m_2 \rangle$$

$$= \hbar^2 j (j+1) + m_2 (-m_2 - 1) \hbar^2$$

$$= \hbar^2 [j(j+1) - m_2 (m_2 + 1)]$$

$$= \hbar^2 (j - m_2)(j + m_2 + 1) = 0 \qquad m_2 = j$$

$$\boxed{J_- |j -j\rangle = 0}$$

$$J_+|jj\rangle = 0 \longrightarrow J_z|jj\rangle = \hbar j|jj\rangle$$

$$|jj-1\rangle \propto J_-|jj\rangle$$

$$|jj-2\rangle \propto (J_-)^2|jj\rangle$$

$$J_-|j\,{-j}\rangle = 0$$

$$\vdots$$

$$|jj-k\rangle \propto (J_-)^k|jj\rangle$$

あるkがあって

$$|jj-k\rangle = |j\,{-j}\rangle$$

$$j-k=-j \longrightarrow 2j=k=0,1,2,3,4\cdots$$

$$j=\frac{k}{2}=0,1,2,3\cdots$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\cdots$$

→ 半奇整数

$\boxed{\text{角運動量の量子化}}$

$|jm\rangle : j = 0, 1, 2 \cdots$ → mは奇数コ

$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\cdots$ → mは偶数コ

jごとに $m = \underbrace{-j,\ -j+1}_{+1},\ \cdots,\ j-1,\ j$

$$\underset{j-(-j-1)コ}{\overset{2j+1コ}{\shortparallel}}$$

$$|jm\rangle \longrightarrow |jm+1\rangle \propto J_+|jm\rangle$$

$$|jm+1\rangle = C J_+|jm\rangle \qquad \langle jm+1|jm+1\rangle = 1$$

$$\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\langle jm+1|jm+1\rangle}} = |C|^2\langle jm|\underset{J^2-J_z(J_z+\hbar)}{\underset{\shortparallel}{J_-J_+}}|jm\rangle = |C|^2\hbar^2\left(j(j+1)-m(m+1)\right)$$

$$|c|^2 = \hbar^{-2}\big(\underbrace{j(j+1) - m(m+1)}_{j^2+j-m^2-m}\big)^{-1}$$

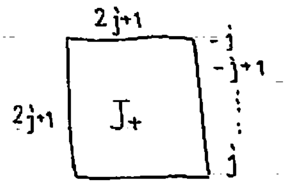
$$= (j-m)(j+m) + (j-m)$$

$$= (j-m)(j+m+1)$$

$$C = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}}$$ [位相を+1にとった]

$$|jm+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}} J_+|jm\rangle, \quad \xrightarrow{} \langle jm+1| \quad \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

$$= \langle jm+1|\underbrace{J_+|jm\rangle}_{\propto\, |jm+1\rangle}$$



一般に… $$\langle jm'|J_+|jm\rangle = \begin{cases} \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)} & (m'=m+1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$|jm-1\rangle = C' J_-|jm\rangle$$

$$1 = \langle jm-1|jm+1\rangle = |c|^2\langle jm|\underbrace{J_+J_-}_{J^2-J_z(J_z-\hbar)}|jm\rangle$$

$$= |c|^2\hbar^2\big(j(j+1) - m(m-1)\big)$$

$$j^2+j-m^2+m$$

$$(j-m)(j+m) + (j+m)$$

$$|jm+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{(j-m-1)(j+m+2)}} J_+|jm+1\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar^2\sqrt{(j-m-1)(j-m)\cdot(j+m+2)(j+m+1)}} J_+^2|jm\rangle$$

$$= \hbar^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{(j-m)!}{(j-m-2)!}\,\frac{(j+m+2)!}{(j+m)!}}} J_+^2|jm\rangle$$

$$|j\ m+k\rangle = \hbar^{-k}\left[\frac{(j-m-k)!}{(j-m)!}\ \frac{(j+m)!}{(j+m+k)!}\right]^{-1/2} J_+^{\,k}|jm\rangle$$

$$\langle j\ m+k|J_+^{\,k}|jm\rangle = \hbar^{k}\left[\frac{(j-m)!}{(j-m-k)!}\ \frac{(j+m+k)!}{(j+m)!}\right]^{1/2}$$

等が導かれる

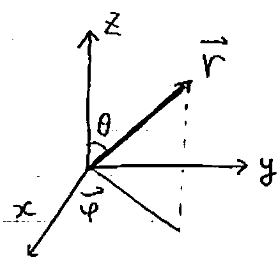
◎ 球面調和関数

$Y_{lm}(\Omega)$, $\Omega=(\theta,\varphi)$

$\vec{J}=\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ として

極座標

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$



$$L^2|lm\rangle=\hbar^2 l(l+1)|lm\rangle$$

$$L_z|lm\rangle=\hbar m|lm\rangle,\quad \langle\Omega|lm\rangle=Y_{lm}(\Omega)$$

球面調和関数

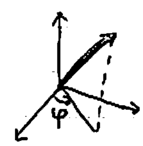
$$Y_{lm}=(-)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(\sin\theta)^m\left(\frac{d}{dt}\right)^m P_l(\theta)\,e^{im\varphi}$$ (Logandole 多項式) $t=\cos\theta$

$$P_l(t)=\frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dt}\right)^l(t^2-1)^l$$

$Y_{lm}(\theta,\varphi)$の一価性より

$e^{im2\pi}=1 \rightarrow m=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 整数

lも整数



$L_+|ll\rangle=0$ $\quad m\geq 0$ $\quad |lm\rangle\propto(L_+)^m|l0\rangle$

$|l0\rangle\propto(L_-)^l|ll\rangle \longrightarrow -m\leq 0$ $\quad |lm\rangle\propto(L_-)^m|l0\rangle$

$j=\frac{1}{2},\frac{3}{2}\cdots$?

スピンとして導入　Pauli

特殊相対論+量子力学

↑

Diracの方程式

Dirac：理論的に導く